Ergänzung zum Skript Wellenausbreitung: Über die Kreisgüte eines Resonators

Christoph Mecklenbräuker

February 20, 2017

1 Mittlere gespeicherte Energie und Verluste

Sei $\bar{W}$ die im zeitlichen Mittel im Resonator gespeicherte Energie des Resonatormodus und P_{V} die mittlere Verlustleistung im Resonator, dann ist die innere Kreisgüte Q definiert durch den Quotienten aus der mittleren gespeicherten Energie und dem pro Schwingungsperiode auftretenden Energieverlust (siehe [1]:Abschnitt 6.2.1)

$$Q = \frac{\omega_0 \bar{W}}{P_{\mathrm{V}}} = \frac{2\pi \bar{W}}{P_{\mathrm{V}} T_0} \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \tag{1}$$

Weitere Bezeichnungen sind: Resonatorgüte, Q-Faktor und Finesse.

2 Abklingverhalten der Eigenschwingung

Ein Resonator mit der inneren Kreisgüte Q wurde vor langer Zeit an einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ angeschlossen. Es hat sich ein stationärer Zustand eingestellt und der Resonator speichert im zeitlichen Mittel die Energie $\bar{W}$ während gleichzeitig die mittlere Verlustleistung P_{V} abgeführt wird. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der harmonische Oszillator abgeschaltet. Wir setzen ohne weitere Energiezufuhr eine exponentielle zeitliche Abnahme der gespeicherten Energie $W(t)$ der Resonatormode voraus,

$$W(t) = \bar{W} \mathrm{e}^{-\sigma t} = \bar{W} \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{mit } \tau = \frac{1}{\sigma}, \tag{2}$$

wobei τ die zugehörige Zeitkonstante ist. Der Kehrwert

$$\sigma = 1/\tau = P_V / \bar{W}$$

definiert den relativen Energieverlust pro Zeiteinheit und wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass 2σ als Resonatorbandbreite im Frequenzbereich interpretiert werden kann. Mit diesen Definitionen wird die Kreisgüte (1)

$$Q = \frac{\omega_0}{\sigma} = 2\pi f_0 \tau \tag{3}$$

Die Eigenschwingung des Resonators klingt für $t > 0$ exponentiell ab. Wir definieren die Impulsantwort des Resonators,

$$h(t) = \begin{cases} h_0 \mathrm{e}^{-\sigma t/2} \cos(\omega_0 t + \phi_0) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

Nach Ablauf von n Perioden der Eigenresonanzfrequenz ist

$$\left| \frac{h(t + nT_0)}{h(t)} \right|^2 = \mathrm{e}^{-n\sigma T_0} = \mathrm{e}^{-2\pi n\sigma/\omega_0} = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n}{Q}}. \tag{5}$$

Diese Beziehung liefert eine Messvorschrift für Q im Zeitbereich am Oszilloskop,

$$Q = \frac{\pi n}{\ln \left| \frac{h(t)}{h(t+nT_0)} \right|}. \tag{6}$$

3 Relative Bandbreite des Resonators

Die Fouriertransformierte der Impulsantwort (4) ist die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{(\cos\phi_0)(\frac{\sigma}{2} + j\omega) - (\sin\phi_0)\omega_0}{(\frac{\sigma}{2} + j\omega)^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{h_0}{2} \left(\frac{\mathrm{e}^{-j\phi_0}}{j(\omega - \omega_0) + \frac{\sigma}{2}} + \frac{\mathrm{e}^{j\phi_0}}{j(\omega + \omega_0) + \frac{\sigma}{2}} \right) \end{aligned}$$

Die zugehörige Intensität (spektrale Leistungsdichte) ist

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|h_0|^2}{4} \left(\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\sigma^2}{4}} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + \frac{\sigma^2}{4}} + 2\,\mathrm{Re}\,(\cdots) \right) \tag{7}$$

Für $\omega_0 \gg \sigma$ gilt in guter Näherung

$$|H(j\omega_0)|^2 \approx \frac{4}{\sigma^2} \tag{8}$$

$$|H(j(\omega_0 \pm \sigma/2))|^2 \approx \frac{2}{\sigma^2} \tag{9}$$

Daher gilt in sehr guter Näherung für die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Intensität

$$\Delta\omega \approx \sigma. \tag{10}$$

Diese Beziehung liefert eine Messvorschrift für Q im Frequenzbereich am Spektralanalysator,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sigma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}\ . \tag{11.77}$$

4 Definition in der Netzwerktheorie

Serienresonanz: Die im zeitlichen Mittel gespeicherte Energie in der Reaktanz $X(\omega)$ ist [2]

$$\bar{W} = \frac{|\hat{I}|^2}{4}\left(\frac{\partial X}{\partial\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{11}$$

Die mittlere Verlustleistung im Ohmschen Widerstand ist

$$P_{\mathrm{V}} = \frac{R\,|\hat{I}|^2}{2} \tag{12}$$

Es ergibt sich also

$$Q = \frac{\omega_0\bar{W}}{P_{\mathrm{V}}} = \frac{\omega_0}{2R}\left(\frac{\partial X}{\partial\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{11.76}$$

Parallelresonanz: Die im zeitlichen Mittel gespeicherte Energie in der Suszeptanz $B(\omega)$ ist [2]

$$\bar{W} = \frac{|\hat{U}|^2}{4}\left(\frac{\partial B}{\partial\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{13}$$

Die mittlere Verlustleistung im Ohmschen Leitwert ist

$$P_{\mathrm{V}} = \frac{G\,|\hat{U}|^2}{2} \tag{14}$$

Es ergibt sich also

$$Q = \frac{\omega_0\bar{W}}{P_{\mathrm{V}}} = \frac{\omega_0}{2G}\left(\frac{\partial B}{\partial\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{11.78}$$

5 RLC Serienschwingkreis

Die Impedanz des Serienschwingkreises ist

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jZ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = R(1 + jQv) \tag{15}$$

mit der inneren Kreisgüte

$$Q = \frac{\omega_0}{2R}\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_0}{R} \tag{16}$$

und der normierten Verstimmung

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \tag{17}$$

sowie

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{und} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{18}$$

6 GLC Parallelschwingkreis

Die Admittanz des Parallelschwingkreises ist

$$Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + jY_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = G(1 + jQv) \tag{19}$$

mit der inneren Kreisgüte

$$Q = \frac{\omega_0}{2G}\left(\frac{\partial B}{\partial \omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{Y_0}{G} \tag{20}$$

und der normierten Verstimmung (17) und

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Z_0} \qquad \text{und} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{21}$$

References

[1] Skript Wellenausbreitung, TU Wien, 12. Auflage, 2014.

[2] G. Nedlin, Energy in Lossless and Low-Loss Networks, and Foster's Reactance Theorem, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 36, No. 4, pp. 561–567, April 1989

[3] H. Foster, Bell Systems Technical Journal 1924