

ZUNAME:
 VORNAME:
 MAT. NR.:

Prüfung 389.153
Musterlösung A
Datenkommunikation
 Institute of Telecommunications
 TU-Wien 12.12.2014

Bitte beachten Sie:

- Die Dauer dieser Klausur beträgt **zwei Zeitstunden**.
- Bitte legen Sie Ihren **Studierendenausweis auf Ihrem Tisch** zur Überprüfung bereit.
- **Mobiltelefone** müssen während der Prüfung **ausgeschaltet** sein und dürfen **nicht auf dem Tisch** liegen!
- Es sind (außer Schreibwerkzeugen) **keine Hilfsmittel** erlaubt, auch keine Taschenrechner!
- **Wichtig:** Bitte beachten Sie, dass Schummeln, wie z.B. die Verwendung nicht erlaubter Hilfsmittel, studienrechtliche und prüfungsrelevante Konsequenzen hat.
- Bitte verwenden Sie einen **permanent färbenden, nicht-roten Stift**.
- Die Beispiele sind ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe auszuarbeiten. **Mitgebrachte Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Sofern weitere Leerseiten zur Bearbeitung der Beispiele benötigt werden, sind diese bei der Klausuraufsicht erhältlich.
- Bitte bearbeiten Sie **nicht mehr als ein Beispiel auf einem Blatt**.
- Bitte kennzeichnen Sie auf **jeder Seite** eindeutig, welche **Aufgabe** und welcher **Unterpunkt** behandelt wird.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer!**
- Diese **Angabe muss, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet**, bei der Klausuraufsicht **abgegeben werden**. Sie dürfen diese Angabe **nicht mitnehmen!**
- Sofern Sie nicht wollen, dass Ihre Bearbeitung eines Beispiels gewertet wird, streichen Sie die entsprechenden Seiten klar ersichtlich durch.
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** sind Voraussetzungen für die positive Beurteilung der Arbeit!
- Bitte **bleiben Sie bei Klausurende** so lange **auf Ihrem Platz**, bis alle Klausuren eingesammelt sind und die Klausuraufsicht die Freigabe zum Verlassen der Hörsaals erteilt.
- Sofern Sie während der Klausur zur Toilette müssen, melden Sie sich bitte rechtzeitig bei der Klausuraufsicht. Bitte **verlassen Sie nicht ohne Rücksprache mit der Klausuraufsicht den Hörsaal**.
- Sofern Sie vor dem Klausurende gehen wollen, tun Sie dies bitte **nicht in den letzten 15min** vor dem Ende der Klausur. Melden Sie sich bevor Sie gehen bei der Klausuraufsicht und geben Sie Ihre Angabe ab.

Abgabezeit: (wird nur bei vorzeitiger Abgabe von der Klausuraufsicht ausgefüllt)

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Summe
Punkte (max.):	20	20	20	20	20	100
Punkte:						

Note:

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Betrachten Sie das Galoisfeld $\text{GF}(5)$.

- (a) (2 Punkte) Welche Elemente enthält $\text{GF}(5)$?
- (b) (3 Punkte) Berechnen Sie $(4+4) \cdot (3+4)$ in $\text{GF}(5)$.
- (c) (3 Punkte) Finden Sie das additive inverse Element “ -4 ” zum Element 4 in $\text{GF}(5)$.
- (d) (4 Punkte) Finden Sie das multiplikative inverse Element “ 4^{-1} ” zum Element 4 in $\text{GF}(5)$.
- (e) (2 Punkte) Berechnen Sie $3-4$ und $3/4$ in $\text{GF}(5)$.
- (f) (4 Punkte) Überprüfen Sie, dass $\alpha=3$ ein primitives Element von $\text{GF}(5)$ ist.
- (g) (2 Punkte) Drücken Sie 4 als Potenz von $\alpha=3$ aus.

(a) Es gilt $\text{GF}(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Zwei alternative Lösungen (beide sind gleich richtig):

$$(4+4) \cdot (3+4) = (8 \bmod 5) \cdot (7 \bmod 5) = 3 \cdot 2 = 6 \bmod 5 = 1;$$

$$(4+4) \cdot (3+4) = 8 \cdot 7 = 56 \bmod 5 = 1.$$

(c) Einfach probieren:

$$4+0 = 4 \neq 0$$

$$4+1 = 5 \bmod 5 = 0 \Rightarrow -4 = 1.$$

(d) Einfach probieren:

$$4 \cdot 0 = 0 \neq 1$$

$$4 \cdot 1 = 4 \neq 1$$

$$4 \cdot 2 = 8 \bmod 5 = 3 \neq 1$$

$$4 \cdot 3 = 12 \bmod 5 = 2 \neq 1$$

$$4 \cdot 4 = 16 \bmod 5 = 1 \Rightarrow 4^{-1} = 4.$$

(e) Man erhält unter Verwendung des Ergebnisses von (c) bzw. (d)

$$3-4 = 3+(-4) = 3+1 = 4$$

$$3/4 = 3 \cdot 4^{-1} = 3 \cdot 4 = 12 \bmod 5 = 2.$$

(f) Es gilt

$$\alpha^0 = 3^0 = 1$$

$$\alpha^1 = 3^1 = 3$$

$$\alpha^2 = 3^2 = 9 \bmod 5 = 4$$

$$\alpha^3 = 3^3 = 3^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \bmod 5 = 2.$$

Es lassen sich also alle von Null verschiedenen Elemente von $\text{GF}(5)$ durch verschiedene Potenzen von $\alpha = 3$ darstellen. Daher ist $\alpha = 3$ ein primitives Element von $\text{GF}(5)$.

(g) In (f) wurde gezeigt, dass $4 = 3^2$.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Eindimensionale Betrachtung: Von einem satellitengestützten Positionsbestimmungssystem ist folgendes bekannt: (1) Das Satellitensignal wird aus dem Generatorpolynom $p(x) = x^4 + x + 1$ erzeugt, (2) die Pulsform der Chips sind NRZ-Pulse, (3) die Chiprate beträgt 10 Mchip/s, (4) die Synchronisationsgenauigkeit liegt unter 10% der Chipdauer.

- (a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Schieberegisterrealisierung des Generatorpolynoms.
- (b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die binäre Folge.
- (c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die periodische Autokorrelationsfunktion der Folge.
- (d) (4 Punkte) Ist die Autokorrelationsfunktion geeignet zur Positionsbestimmung? Wenn ja, warum?
- (e) (4 Punkte) Welche eindimensionale Genauigkeit der Ortsbestimmung kann, unter der Annahme von idealen Ausbreitungsverhältnissen, erreicht werden?

Hinweis: Der NRZ (no-return-to-zero) Puls entspricht einer rechteckigen Kurvenform.

(a) Durch null setzen des Generatorpolynoms folgt die Schieberegisterrealisierung:

$$p(x) = x^4 + x + 1 = 0 \mapsto 1 = x^4 + x$$

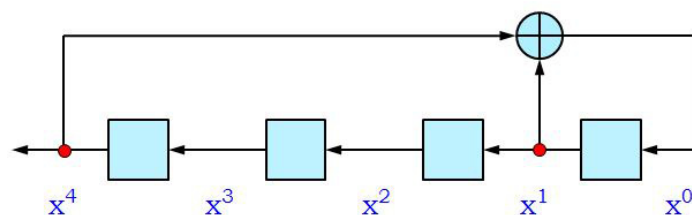


Abbildung 1: Schieberegisterrealisierung des Generatorpolynoms $p(x) = x^4 + x + 1$.

- (b) Füttert man das Schieberegister mit dem Anfangszustand [0001] und bestimmt alle weiteren Zustände so erhält man die Tabelle in Abbildung 2. Aus dieser Tabelle entnimmt man die Periode $L = 15$ und die Folge am Ausgang des Schieberegisters $\vec{c} = [000111101011001]$.
- (c) Da es sich um eine Folge maximaler Länge $L = 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$ handelt entspricht diese Folge einer PN-Folge, deren AKF zweiwertig ist, siehe Abbildung 3.
- (d) Die AKF ist geeignet zur genauen Positionsbestimmung durch die Anwendung des Prinzips der Laufzeitmessung. Da über die hohe Zeitauflösung (Dirac-ähnlich) eine genaue Ortsbestimmung über die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist.
- (e) Mit der Chiprate (10 Mchip/s) und der Synchronisationsgenauigkeit folgt die räumliche Genauigkeit: Die Chipdauer, als Kehrwert der Chiprate, beträgt $0.1 \mu s$. Mit der zeitlichen Synchronisation auf 10 % der Chipdauer ergibt sich eine zeitliche Auflösung von $0,01 \mu s$. Daraus folgt eine entfernungsabhängige Genauigkeit (1-dim) von (plus/minus):

$$\Delta r = c \cdot \Delta T = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3m$$

Takt	Register	Ausgang
0	0001	0
1	0011	0
2	0111	0
3	1111	1
4	1110	1
5	1101	1
6	1010	1
7	0101	0
8	1011	1
9	0110	0
10	1100	1
11	1001	1
12	0010	0
13	0100	0
14	1000	1
15	0001	0

Abbildung 2: Schieberegisterzustände für Generatorpolynom $p(x) = x^4 + x + 1$.

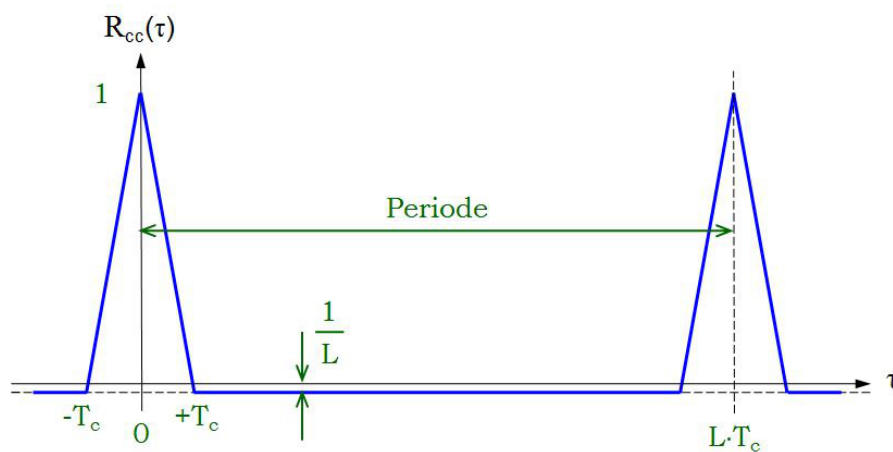


Abbildung 3: AKF einer m-Folge.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Betrachten Sie folgende gedächtnislose diskrete Quelle:

U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$P(U)$	1/2	1/4	1/16	1/16	1/16	1/32	1/32

- (a) (2 Punkte) Wieviele Bits benötigt man für diese Quelle mit einem binären Code konstanter Länge?
- (b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Entropie der Quelle (in bit).
- (c) (3 Punkte) Gibt es für diese Quelle einen präfixfreien binären Code mit Codewortlängen $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 5, w_6 = 6, w_7 = 6$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) (7 Punkte) Entwerfen Sie einen binären Huffman-Code für die gegebene Quelle.
- (e) (3 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge Ihres Huffman-Codes.

(a) $W = \lceil \log_2(L) \rceil = \lceil \log_2(7) \rceil = 3 \text{ bit}$

(b)

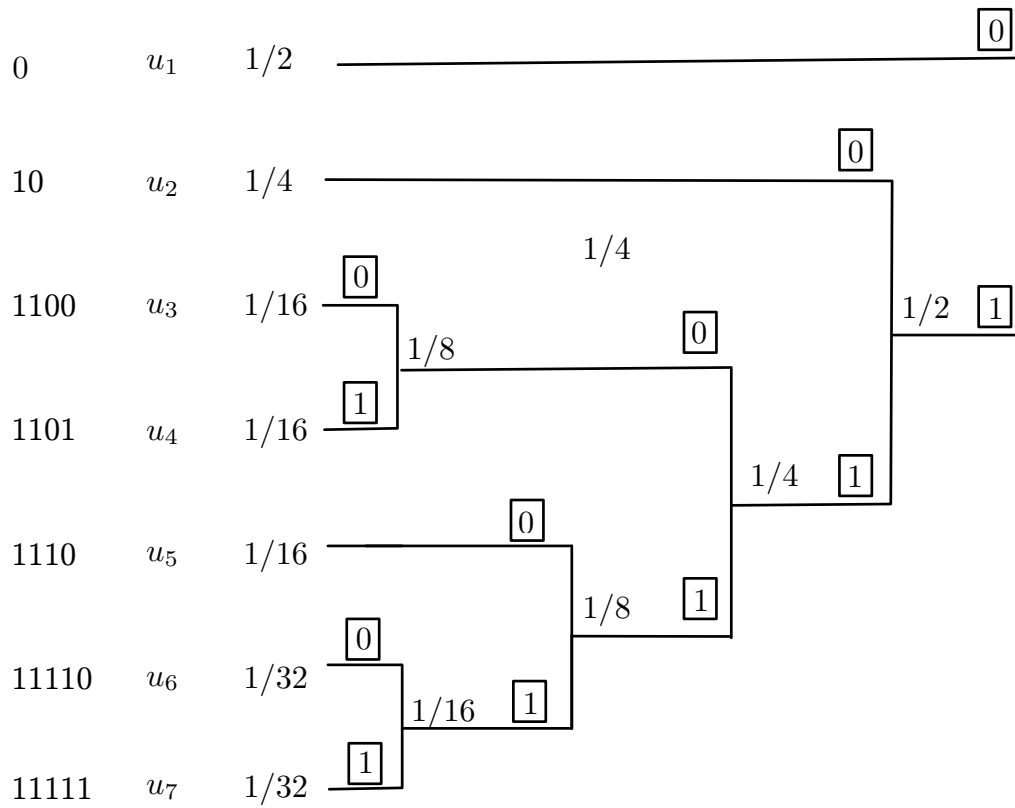
U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$P(U)$	1/2	1/4	1/16	1/16	1/16	1/32	1/32
$-\log_2 P(U)$	1	2	4	4	4	5	5
$-P(U) \log_2 P(U)$	16/32	16/32	8/32	8/32	8/32	5/32	5/32

$$H(U) = - \sum_{i=1}^8 P(u_i) \log_2 P(u_i) = \frac{66}{32} = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16} = 2.0625 \text{ bit}$$

(c) Ja, da Kraftsche Ungleichung erfüllt:

$$\sum_{i=1}^7 2^{-w_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-6} = 1 \leq 1$$

(d)

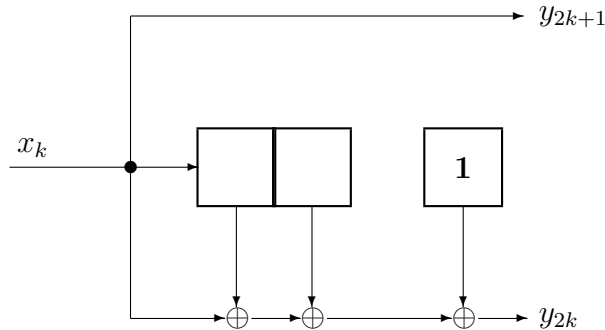


(e)

$$\begin{aligned}
 E[W] &= \sum_{i=1}^7 w_i p_i \\
 &= 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 4 \cdot 1/16 + 2 \cdot 5 \cdot 1/32 = \frac{33}{16} = 2 \frac{1}{16} = 2.0625 = H(U)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Gegeben sei der folgende Faltungscodierer:



- (a) (4 Punkte) Wieviele verschiedene innere Zustände hat dieser Codierer?
- (b) (4 Punkte) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm mit Beschriftung der Ein- und Ausgabesymbole!
- (c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Codesequenz y_k , die sich aus der Informationssequenz $x_k = 10111\ 00$ ergibt. Die internen Register sind initialisiert mit dem Bit 0.
- (d) (4 Punkte) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm dieses Codierers und beschriften Sie die Kanten mit den zugehörigen Ein- und Ausgabesymbolen.
- (e) (4 Punkte) Es wurde die fehlerhafte Sequenz 0000 0000 0000 0011 empfangen. Decodieren Sie mit dem Viterbi-Algorithmus.

[Musterlösung kommt noch](#)

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Gegeben ist ein slotted ALOHA Netzwerk mit $m = 3$ Sendern. Von den 3 Sendern sind $k = 2$ Sender im Zustand backlogged und $m - k = 1$ Sender im Zustand non-backlogged.

Die Wahrscheinlichkeit p_r , dass ein backlogged Sender versucht ein Packet zu senden ist $p_r = 0,9$.

Die Wahrscheinlichkeit p_a , dass ein non-backlogged Sender versucht ein Packet zu senden ist $p_a = 0,5$.

- (a) (5 Punkte) Berechnen Sie (mit Hilfe der Binomialverteilung) die Wahrscheinlichkeit P_{empty} , dass der nächste Zeitschlitz leer bleibt.
- (b) (4 Punkte) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit $P_{success} = 0,095$, dass in dem Zeitschlitz ein Paket erfolgreich gesendet wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision $P_{collision}$.
- (c) (2 Punkte) k gibt die Anzahl der backlogged Sender in dem Netzwerk an. Was muss passieren, damit das System vom Zustand $k = 2$ in den Zustand $k = 1$ übergeht?
- (d) (6 Punkte) Berechnen Sie (mit Hilfe der Binomialverteilung) die Wahrscheinlichkeit P_{21} , dass das System vom Zustand $k = 2$ in den Zustand $k = 1$ übergeht.
- (e) (3 Punkte) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P_{01} , dass das System vom Zustand $k = 0$ (kein backlogged Sender) in den Zustand $k=1$ (ein backlogged Sender) übergeht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a)

$$P(t|n) = \binom{n}{t} \cdot p^t \cdot (1 - p)^{n-t}$$

$$\begin{aligned} P_{empty} &= P_r(0|k) \cdot P_a(0|m - k) \\ &= \binom{k}{0} \cdot p_r^0 \cdot (1 - p_r)^{k-0} \cdot \binom{m - k}{0} \cdot p_a^0 \cdot (1 - p_a)^{m-k-0} \\ &= (1 - p_r)^k \cdot (1 - p_a)^{m-k} \end{aligned}$$

$$P_{empty} = (1 - 0,9)^2 \cdot (1 - 0,5)^1 = 0,01 \cdot 0,5 = 0,005$$

(b)

$$P_{collision} = 1 - P_{empty} - P_{success} = 1 - 0,005 - 0,095 = 0,9$$

(c) *Ein backlogged Sender muss erfolgreich ein Paket senden.*

(d)

$$\begin{aligned}P_{21} &= P_r(1|k) \cdot P_a(0|m-k) \\ &= \binom{k}{1} \cdot p_r^1 \cdot (1-p_r)^{k-1} \cdot \binom{m-k}{0} \cdot p_a^0 \cdot (1-p_a)^{m-k} \\ &= k \cdot p_r \cdot (1-p_r)^{k-1} \cdot (1-p_a)^{m-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{21} &= 2 \cdot 0,9 \cdot (1-0,9) \cdot (1-0,5) \\ &= 2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 0,09\end{aligned}$$

(e)

$$P_{01} = 0$$

Begründung: Damit eine Kollision entsteht müssen mindestens 2 Sender versuchen zu senden. Beide würden dann in den Zustand backlogged übergehen, also $k=2$. Daher gibt es keinen Übergang vom Zustand $k=0$ in den Zustand $k=1$.