ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

Prüfung 389.153
Musterlösung B
Datenkommunikation
Institute of Telecommunications
TU-Wien **19.01.2015**

Bitte beachten Sie:

- Die Dauer dieser Klausur beträgt **zwei Zeitstunden**.
- Bitte legen Sie Ihren **Studierendenausweis auf Ihrem Tisch** zur Überprüfung bereit.
- **Mobiltelefone** müssen während der Prüfung **ausgeschaltet** sein und dürfen **nicht auf dem Tisch** liegen!
- Es sind (außer Schreibwerkzeugen) **keine Hilfsmittel** erlaubt, auch keine Taschenrechner!
- **Wichtig:** Bitte beachten Sie, dass Schummeln, wie z.B. die Verwendung nicht erlaubter Hilfsmittel, studienrechtliche und prüfungsrelevante Konsequenzen hat.
- Bitte verwenden Sie einen **permanent färbenden, nicht-roten Stift**.
- Die Beispiele sind ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe auszuarbeiten. **Mitgebrachte Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Sofern weitere Leerseiten zur Bearbeitung der Beispiele benötigt werden, sind diese bei der Klausuraufsicht erhältlich.
- Bitte bearbeiten Sie ***nicht*** **mehr als ein Beispiel auf einem Blatt**.
- Bitte kennzeichnen Sie auf **jeder Seite** eindeutig, welche **Aufgabe** und welcher **Unterpunkt** behandelt wird.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**!
- Diese **Angabe *muss*, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet,** bei der Klausuraufsicht **abgegeben werden**. **Sie dürfen diese Angabe *nicht* mitnehmen!**
- Sofern Sie nicht wollen, dass Ihre Bearbeitung eines Beispiels gewertet wird, streichen Sie die entsprechenden Seiten klar ersichtlich durch.
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** sind Voraussetzungen für die positive Beurteilung der Arbeit!
- Bitte **bleiben Sie bei Klausurende** so lange **auf Ihrem Platz**, bis alle Klausuren eingesammelt sind und die Klausuraufsicht die Freigabe zum Verlassen der Hörsaals erteilt.
- Sofern Sie während der Klausur zur Toilette müssen, melden Sie sich bitte rechtzeitig bei der Klausuraufsicht. Bitte **verlassen Sie nicht ohne Rücksprache mit der Klausuraufsicht den Hörsaal**.
- Sofern Sie vor dem Klausurende gehen wollen, tun Sie dies bitte **nicht in den letzten 15min** vor dem Ende der Klausur. Melden Sie sich bevor Sie gehen bei der Klausuraufsicht und geben Sie Ihre Angabe ab.

Abgabezeit: (wird nur bei vorzeitiger Abgabe von der Klausuraufsicht ausgefüllt) ......

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Summe
Punkte (max.):	20	20	20	20	20	100
Punkte:						

Note: ......

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Betrachten Sie das Galoisfeld GF(5).

(a) (2 Punkte) Welche Elemente enthält GF(5)?

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie $2{\cdot}4+3{\cdot}4$ in GF(5).

(c) (4 Punkte) Finden Sie das additive inverse Element “-3” zum Element 3 in GF(5).

(d) (3 Punkte) Finden Sie das multiplikative inverse Element “3^{-1}” zum Element 3 in GF(5).

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie $2-3$ und $2/3$ in GF(5).

(f) (4 Punkte) Überprüfen Sie, dass $\alpha=2$ ein primitives Element von GF(5) ist.

(g) (2 Punkte) Drücken Sie 3 als Potenz von $\alpha=2$ aus.

(a) Es gilt $\mathrm{GF}(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Zwei alternative Lösungen (beide sind gleich richtig):

$$
\begin{aligned}
2{\cdot}4 + 3{\cdot}4 &= 8 \bmod 5 + 12 \bmod 5 = (3+2) \bmod 5 = 0\,; \\
2{\cdot}4 + 3{\cdot}4 &= 8 + 12 = 20 \bmod 5 = 0\,.
\end{aligned}
$$

(c) Einfach probieren:

$$
\begin{aligned}
3+0 &= 3 \neq 0 \\
3+1 &= 4 \neq 0 \\
3+2 &= 5 \bmod 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 = 2\,.
\end{aligned}
$$

(d) Einfach probieren:

$$
\begin{aligned}
3{\cdot}0 &= 0 \neq 1 \\
3{\cdot}1 &= 3 \neq 1 \\
3{\cdot}2 &= 6 \bmod 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3^{-1} = 2\,.
\end{aligned}
$$

(e) Man erhält unter Verwendung des Ergebnisses von (c) bzw. (d)

$$
\begin{aligned}
2-3 &= 2+(-3) = 2+2 = 4 \\
2/3 &= 2{\cdot}3^{-1} = 2{\cdot}2 = 4\,.
\end{aligned}
$$

(f) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\alpha^0 &= 2^0 = 1 \\
\alpha^1 &= 2^1 = 2 \\
\alpha^2 &= 2^2 = 4 \\
\alpha^3 &= 2^3 = 8 \bmod 5 = 3\,.
\end{aligned}
$$

Es lassen sich also alle von Null verschiedenen Elemente von GF(5) durch verschiedene Potenzen von $\alpha = 2$ darstellen. Daher ist $\alpha = 2$ ein primitives Element von GF(5).

(g) In (f) wurde gezeigt, dass $3 = 2^3$.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Eindimensionale Betrachtung: Von einem satellitengestützten Positionsbestimmungssystem ist folgendes bekannt: (1) Das Satellitensignal wird aus dem Generatorpolynom $p(x) = x^4 + x + 1$ erzeugt, (2) die Pulsform der Chips sind NRZ-Pulse, (3) die Chiprate beträgt 1 Mchip/s, (4) die Synchronisationsgenauigkeit liegt unter 3% der Chipdauer.

(a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Schieberegisterrealisierung des Generatorpolynoms.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die binäre Folge.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die periodische Autokorrelationsfunktion der Folge.

(d) (4 Punkte) Ist die Autokorrelationsfunktion geeignet zur Positionsbestimmung? Wenn ja, warum?

(e) (4 Punkte) Welche eindimensionale Genauigkeit der Ortsbestimmung kann, unter der Annahme von idealen Ausbreitungsverhältnissen, erreicht werden?

Hinweis: Der NRZ (no-return-to-zero) Puls entspricht einer rechteckigen Kurvenform.

(a) Durch null setzen des Generatorpolynoms folgt die Schieberegisterrealisierung:

$$p(x) = x^4 + x + 1 = 0 \mapsto 1 = x^4 + x$$

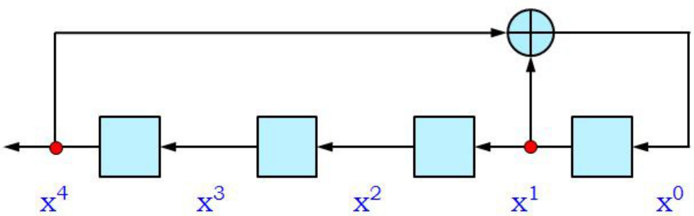


Abbildung 1: Schieberegisterrealisierung des Generatorpolynoms $p(x) = x^4 + x + 1$.

(b) Füttert man das Schieberegister mit dem Anfangszustand [0001] und bestimmt alle weiteren Zustände so erhält man die Tabelle in Abbildung 2. Aus dieser Tabelle entnimmt man die Periode $L = 15$ und die Folge am Ausgang des Schieberegisters $\overrightarrow{c} = [000111101011001]$

(c) Da es sich um eine Folge maximaler Länge $L = 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$ handelt entspricht diese Folge einer PN-Folge, deren AKF zweiwertig ist, siehe Abbildung 3.

(d) Die AKF ist geeignet zur genauen Positionsbestimmung durch die Anwendung des Prinzips der Laufzeitmessung. Da über die hohe Zeitauflösung (Dirac-ähnlich) eine genaue Ortsbestimmung über die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist.

(e) Mit der Chiprate (1 Mchip/s) und der Synchronisationsgenauigkeit folgt die räumliche Genauigkeit: Die Chipdauer, als Kehrwert der Chiprate, beträgt 1 μs. Mit der zeitlichen Synchronisation auf 3 % der Chipdauer ergibt sich eine zeitliche Auflösung von 0,03 μs. Daraus folgt eine entfernungsabhängige Genauigkeit (1-dim) von (plus/minus):

$$\Delta r = c \cdot \Delta T = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} \cdot 0.03 = 9m$$

Takt	Register	Ausgang
0	**0001**	0
1	0011	0
2	0111	0
3	1111	1
4	1110	1
5	1101	1
6	1010	1
7	0101	0
8	1011	1
9	0110	0
10	1100	1
11	1001	1
12	0010	0
13	0100	0
14	1000	1
15	**0001**	0

Abbildung 2: Schieberegisterzustände für Generatorpolynom $p(x) = x^4 + x + 1$.

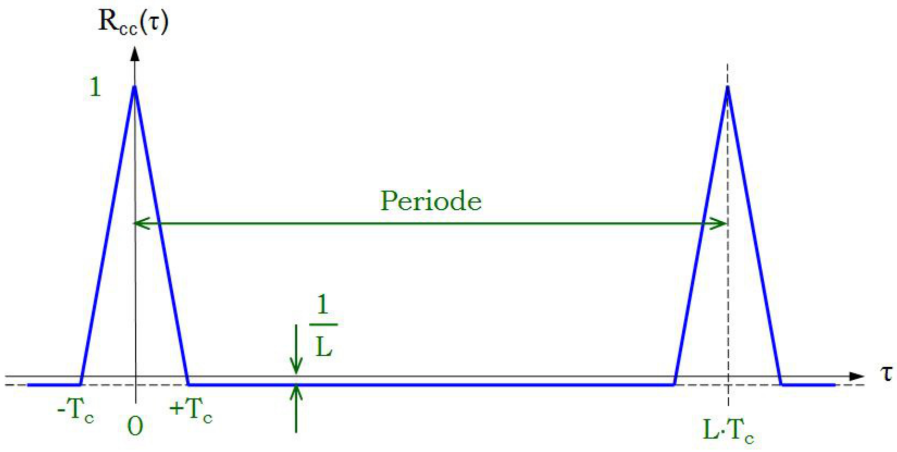


Abbildung 3: AKF einer m-Folge.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Betrachten Sie folgende gedächtnislose diskrete Quelle:

U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$P(U)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/32$	$1/32$	$1/32$	$1/32$

(a) (2 Punkte) Geben Sie eine einfache obere Schranke für die Entropie dieser Quelle an.

(b) (3 Punkte) Gibt es für diese Quelle einen präfixfreien binären Code mit Codewortlängen $w_1 = 2$, $w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = 3$, $w_8 = 4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) (7 Punkte) Entwerfen Sie einen binären Huffman-Code für die gegebene Quelle.

(d) (8 Punkte) Vergleichen Sie die mittlere Codewortlänge Ihres Huffman-Codes mit der Entropie der Quelle (in bit).

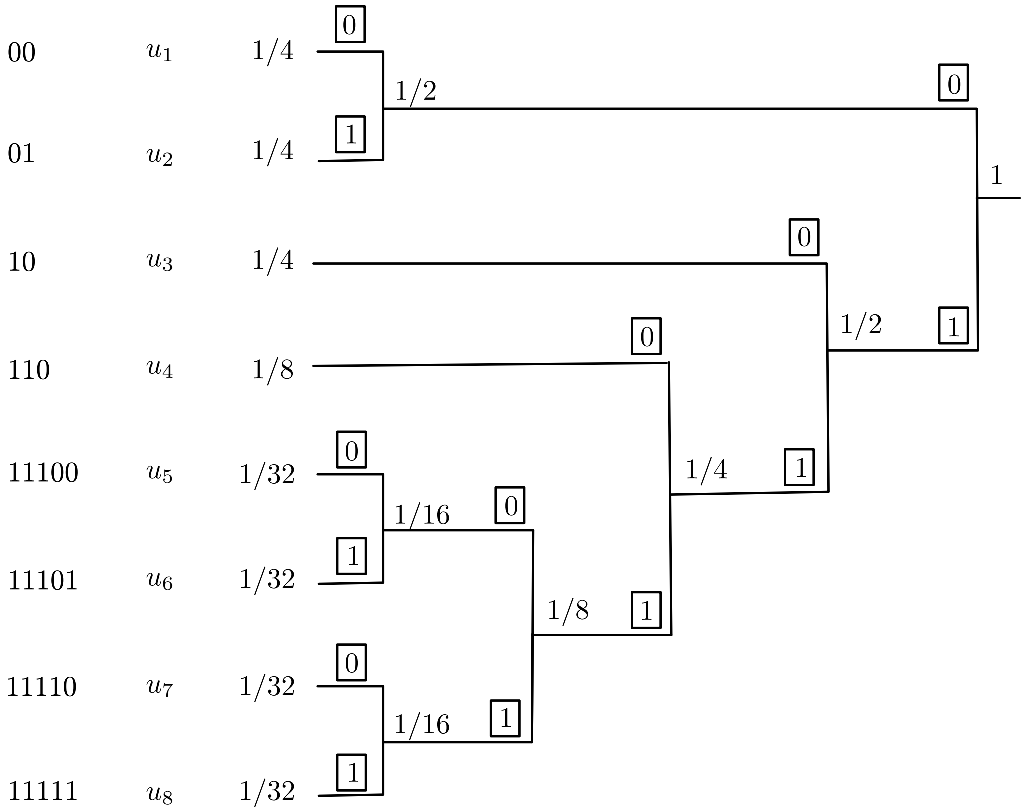
U	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$P(U)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/32$	$1/32$	$1/32$	$1/32$
$-\log_2 P(U)$	2	2	2	3	5	5	5	5
$-P(U)\log_2 P(U)$	$16/32$	$16/32$	$16/32$	$12/32$	$5/32$	$5/32$	$5/32$	$5/32$

(a) $H(U) \leq \log_2(L) = \log_2(8) = 3\,\text{bit}$

(b) Nein, da Kraftsche Ungleichung nicht erfüllt:

$$\sum_{i=1}^{8} 2^{-w_i} = 2^{-2} + 6 \cdot 2^{-3} + 2^{-4} = \frac{17}{16} > 1$$

(c)



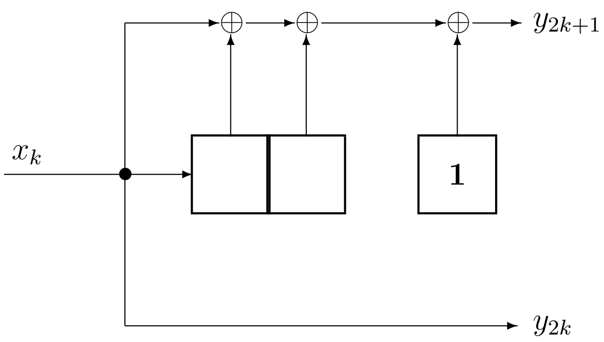
(d)

$$E[W] = \sum_{i=1}^{8} w_i\, p_i$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 5 \cdot 1/32 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$H(U) = -\sum_{i=1}^{8} P(u_i) \log_2 P(u_i) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2} = 2.5\,\text{bit}$

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Gegeben sei der folgende Faltungscodierer:



(a) (4 Punkte) Wieviele verschiedene innere Zustände hat dieser Codierer?

(b) (4 Punkte) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm mit Beschriftung der Ein– und Ausgabesymbole!

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Codesequenz, die sich aus der Informationssequenz 10111 00 ergibt. Die internen Register sind initialisiert mit dem Bit 0.

(d) (4 Punkte) Zeichnen Sie das Trellisdiagramm dieses Codierers und beschriften Sie die Kanten mit den zugehörigen Ein– und Ausgabesymbolen.

(e) (4 Punkte) Es wurde die fehlerhafte Sequenz 0000 0000 0000 0011 empfangen. Decodieren Sie mit dem Viterbi-Algorithmus.

Musterlösung kommt noch

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Gegeben ist ein slotted ALOHA Netzwerk mit $m = 3$ Sendern. Von den 3 Sendern sind $k = 2$ Sender im Zustand backlogged und $m - k = 1$ Sender im Zustand non-backlogged.

Die Wahrscheinlichkeit p_r, dass ein backlogged Sender versucht ein Packet zu senden ist $p_r = 0,8$.

Die Wahrscheinlichkeit p_a, dass ein non-backlogged Sender versucht ein Packet zu senden ist $p_a = 0,5$.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie (mit Hilfe der Binomialverteilung) die Wahrscheinlichkeit P_{empty}, dass der nächste Zeitschlitz leer bleibt.

(b) (4 Punkte) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit $P_{success} = 0,18$, dass in dem Zeitschlitz ein Paket erfolgreich gesendet wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision $P_{collision}$.

(c) (2 Punkte) k gibt die Anzahl der backlogged Sender in dem Netzwerk an. Was muss passieren, damit das System vom Zustand $k = 2$ in den Zustand $k = 1$ übergeht?

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie (mit Hilfe der Binomialverteilung) die Wahrscheinlichkeit P_{21}, dass das System vom Zustand $k = 2$ in den Zustand $k = 1$ übergeht.

(e) (3 Punkte) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P_{01}, dass das System vom Zustand $k = 0$ (kein backlogged Sender) in den Zustand k=1 (ein backlogged Sender) übergeht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a)

$$P(t|n) = \binom{n}{t} \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

$$\begin{aligned} P_{empty} &= P_r(0|k) \cdot P_a(0|m-k) \\ &= \binom{k}{0} \cdot p_r^0 \cdot (1-p_r)^{k-0} \cdot \binom{m-k}{0} \cdot p_a^0 \cdot (1-p_a)^{m-k-0} \\ &= (1-p_r)^k \cdot (1-p_a)^{m-k} \end{aligned}$$

$$P_{empty} = (1-0,8)^2 \cdot (1-0,5)^1 = 0,04 \cdot 0,5 = 0,02$$

(b)

$$P_{collision} = 1 - P_{empty} - P_{success} = 1 - 0,02 - 0,18 = 0,8$$

(c) *Ein backlogged Sender muss erfolgreich ein Paket senden.*

(d)

$$\begin{aligned}
P_{21} &= P_r(1|k) \cdot P_a(0|m-k) \\
&= \binom{k}{1} \cdot p_r^1 \cdot (1-p_r)^{k-1} \cdot \binom{m-k}{0} \cdot p_a^0 \cdot (1-p_a)^{m-k} \\
&= k \cdot p_r \cdot (1-p_r)^{k-1} \cdot (1-p_a)^{m-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{21} &= 2 \cdot 0,8 \cdot (1-0,8) \cdot (1-0,5) \\
&= 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,16
\end{aligned}$$

(e)

$$P_{01} = 0$$

Begründung: Damit eine Kollision entsteht müssen mindestens 2 Sender versuchen zu senden. Beide würden dann in den Zustand backlogged übergehen, also k=2. Daher gibt es keinen Übergang vom Zustand k=0 in den Zustand k=1.