

# Zeitdiskrete Signale und Systeme

Korrekturen und Ergänzungen zum Buch (1. Auflage)

Version 9. Mai 2015

Dr. Gerhard Doblinger  
Institute of Telecommunications  
Technische Universität Wien  
Gusshausstr. 25/389  
A-1040 Wien

Tel. +43 1 58801 38927, Fax +43 1 58801 938927  
Email: [gerhard.doblinger@nt.tuwien.ac.at](mailto:gerhard.doblinger@nt.tuwien.ac.at)  
Internet: [www.nt.tuwien.ac.at/about-us/staff/gerhard-doblinger/](http://www.nt.tuwien.ac.at/about-us/staff/gerhard-doblinger/)

Home Page des Buches:

[www.nt.tuwien.ac.at/about-us/staff/gerhard-doblinger/](http://www.nt.tuwien.ac.at/about-us/staff/gerhard-doblinger/)

## Vorwort

Mit dieser Zusammenstellung möchte ich in erster Linie Fehler im Buch korrigieren, die mir bis jetzt aufgefallen sind bzw. auf die Leser des Buches und Zuhörer der Vorlesung an der TU-Wien in dankenswerter Weise hingewiesen haben. Zusätzlich werden hier auch Ergänzungen zum Stoff und Hinweise auf neue Übungsbeispiele und neue Versionen der MATLAB/OCTAVE-Programme zu finden sein. Schauen Sie daher gelegentlich auf meiner Home Page nach, ob eine neue Version dieses PDF-Files existiert.

**Hinweis:** Diese Zusammenstellung bezieht sich auf die 1. Auflage des Buches. In der aktuellen 2. Auflage (erschienen im April 2010) sind alle angegebenen Fehler korrigiert und die meisten Ergänzungen enthalten.

Wien, im Mai 2011

G. Doblinger



## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Zeitdiskrete Signale	1
3	Zeitdiskrete Systeme	2
4	Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale und Systeme	2
5	Differenzgleichungen und Z-Transformation	3
6	Digitale Filter	3
7	Diskrete Fouriertransformation (DFT)	7
8	Multiratensignalverarbeitung	7
A	Formeln für Fourier- und Z-Transformation	8



# 1 Einleitung

## 2 Zeitdiskrete Signale

Seite 10: **Ergänzung zu Abb. 2.3**

Die graphische Darstellung des zeitdiskreten Cosinussignals  $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}kn)$  zeigt, dass sich die Kurvenform für  $k > N/2$  (d.h.  $\theta_0 > \pi$ ) in umgekehrter Reihenfolge wiederholt. Frequenzen  $\theta_0 = \frac{2\pi}{N}k$  und  $\theta'_0 = 2\pi - \frac{2\pi}{N}k = \frac{2\pi}{N}(N - k)$  ergeben den gleichen Signalverlauf in Abb. 2.3. Setzen wir nämlich  $\theta'_0$  in  $x[n]$  ein, so erhalten wir

$$x'[n] = \cos \theta'_0 n = \cos \left( \frac{2\pi}{N}(N - k)n \right) = \cos \left( \frac{2\pi}{N}kn \right) = x[n]$$

Hingegen ergibt sich z.B. für  $x[n] = \sin \theta_0 n$

$$x'[n] = \sin \theta'_0 n = \sin \left( \frac{2\pi}{N}(N - k)n \right) = -\sin \left( \frac{2\pi}{N}kn \right) = -x[n],$$

also das ursprüngliche Signal mit Vorzeichenumkehr. Im allgemeinen Fall hat  $x'[n]$  einen anderen Signalverlauf als  $x[n]$ . Wie bei der Abtastung in Abschnitt 4.2 näher erläutert, bezeichnet man  $x'[n]$  als das zu  $x[n]$  gehörende **Aliasing-Signal**. Charakteristisch für dieses Signal ist das im Vergleich zum ursprünglichen Signal gespiegelte Frequenzverhalten.

Seite 10, Gleichung (2.15):  $N$  ist die Periode der Grundfrequenz  $\theta_0$  und ist i.A. nicht gleich der Grundperiodendauer (d.i. die kleinstmögliche Periode) für alle  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Seite 13, Gleichung (2.25)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-L}^L \cos^2 \theta_0 n &= L + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-L}^L \cos 2\theta_0 n \\ &= L + \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2L+1)\theta_0]}{2 \sin \theta_0} \end{aligned}$$

Seite 13, Gleichung (2.26)

$$P_x = \begin{cases} 1 & \theta_0 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \\ \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Seite 17, Gleichung (2.39)  $r[n] = \sigma[n]\sigma[-n + L - 1]$

Seite 20, Gleichung (2.48) gilt für  $m \neq 0$ . Für  $m = 0$  ( $x[n] = 1, \forall n$ ) ergibt sich  $c_k = \delta[k]$ .

### 3 Zeitdiskrete Systeme

Seite 31, 32: **Ergänzung zur Gültigkeit der Gleichungen (3.5) und (3.7)**

Die allgemeine Gültigkeit von (3.5) setzt voraus, dass die Operation  $\mathcal{T}\{\cdot\}$  mit der unendlichen Summe vertauschbar ist. Nur dann kann das lineare System durch die Impulsantwort  $h[n, k]$  beschrieben werden. Das gilt auch für die Faltungsbeziehung (3.7). Es gibt daher lineare und zeitinvariante Systeme, die nicht durch (3.7) beschrieben werden können. Ein Beispiel ist das System  $y[n] = \lim_{k \rightarrow -\infty} x[k]$ , das einen konstanten Ausgangswert liefert, falls der Grenzwert nicht null ist. Das System ist linear und zeitinvariant (LTI System). Die Impulsantwort dieses Systems ist  $h[n] = \lim_{k \rightarrow -\infty} \delta[k] = 0$ . Damit ergibt sich mit der Faltungsbeziehung  $y[n] = 0$  (und nicht  $x[-\infty]$ ). LTI-Systeme, deren Eingangs/Ausgangsverhalten nicht durch die Faltungsbeziehung charakterisiert werden kann, haben jedoch keine nennenswerte praktische Bedeutung.

Eine erweiterte Systembeschreibung, die auch diese Grenzfälle mit einschließt, ist in der folgenden Veröffentlichung zu finden:

I. W. Sandberg, "A representation theorem for linear systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, pp. 578-580, May 1998.

Seite 32, letzter Absatz:  $a[0] = \frac{1}{2}$  (statt  $a[1]$ )

Seite 33, Gleichung (3.11): Der Faktor  $\frac{1}{2}$  fehlt bei den Summen.

Seite 36, Gleichung (3.22):  $y[n] = (2 + 2^{13}) \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 10$

Seite 40, Gleichung (3.30): Der Faktor  $\frac{1}{N}$  vor der Summe gehört weg.

### 4 Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale und Systeme

Seite 63: **Fouriertransformation periodischer, zeitdiskreter Signale**

Als **Ergänzung** soll hier Gleichung (4.23) hergeleitet werden, da der Übergang von (4.22) zu (4.23) nicht so unmittelbar ersichtlich ist.

Wird die Fouriertransformation von  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  nicht nur für  $\theta \in [-\pi, \pi]$  bzw.  $\theta \in [0, 2\pi]$  angegeben, sondern für  $\theta \in [-\infty, \infty]$ , dann müssen die periodischen Fortsetzungen (mit  $2\pi$ ) der Fouriertransformation berücksichtigt werden. Mit

$$e^{j\theta_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi l), \quad \forall \theta \quad (1)$$

erhalten wir mit  $\theta_0 = \frac{2\pi}{N}k$  entsprechend zu (4.22)

$$X(e^{j\theta}) = \mathcal{FT} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta \left( \theta - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi l \right), \quad \forall \theta. \quad (2)$$

Die Fourierreihenkoeffizienten  $c_k$  sind periodisch mit  $N$ . Daher können wir auch  $c_{k+lN}$  statt  $c_k$  in Gl. 2 verwenden und erhalten

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_{k+lN} \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}(k+lN)\right), \quad \forall\theta. \quad (3)$$

Ersetzen wir jetzt  $k+lN$  durch den Index  $m$ , dann können wir die Doppelsumme durch eine einzige Summe über  $m$  ersetzen, da sowohl mit  $m$  als auch mit  $k+lN$ ,  $k=0, \dots, N-1$ ,  $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  alle Indizes von  $-\infty, \dots, \infty$  erfasst werden. Damit erhalten wir aus Gl. 3

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi c_m \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}m\right), \quad \forall\theta, \quad (4)$$

in Übereinstimmung mit (4.23).

## 5 Differenzengleichungen und Z-Transformation

Seite 102, erster Absatz (markiert durch Balken): Der dritte und vierte Punkt bezieht sich auf **stabile**, zweiseitige Signale. Andere Fälle können mit dem MATLAB-Programm `IZT_demo.m` der Programmsammlung zu diesem Buch anschaulich dargestellt werden.

## 6 Digitale Filter

Seite 120, Gl. (6.10): Ist nur für  $n_0$  gerade gültig. Für  $n_0$  gerade und ungerade gilt

$$h[n] = (-1)^{n-n_0} \frac{\sin((\pi - \theta_g)(n - n_0))}{\pi(n - n_0)}, \quad \forall n$$

Seite 123, Gl. (6.17):

$$a[n] \approx \frac{1}{\sin \frac{\theta_0}{2}} h_{\text{TP}}[n] \sin\left(\theta_0 \left(n - n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Seite 131, Tabelle 6.1: Neue MATLAB-Versionen verwenden `rectwin()` anstelle von `boxcar()`. Die Funktion `boxcar()` wird in zukünftigen MATLAB-Versionen nicht mehr vorhanden sein.

Seite 127, **Ergänzung:** In einem zusätzlichen Beispiel möchte ich die Anwendung des Hilberttransformators zur Darstellung unsymmetrischer Bandpasssignale behandeln.



### Beispiel 6.6

In diesem Beispiel werden wir eine für praktische Anwendungen wichtige Darstellung allgemeiner, reellwertiger Bandpasssignale herleiten und zur Bestimmung der Einhüllenden dieser Signale heranziehen. Das Spektrum allgemeiner Bandpasssignale ist unsymmetrisch bezüglich einer Modulationsfrequenz (Bezugsfrequenz)  $\theta_0$  (siehe Abb. 1). Beim Spezialfall symmetrischer Bandpasssignale (siehe Gl. 6.14) auf Seite 122) ist  $\theta_0$  gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzfrequenzen).

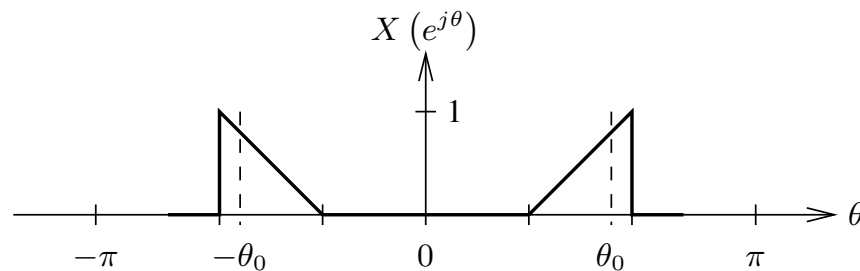


Abbildung 1: Spektrum eines unsymmetrischen Bandpasssignals (Bezugsfrequenz  $\theta_0$ )

Wir bilden nun das so genannte analytische Signal  $x_+[n]$ , das im Gegensatz zum ursprünglichen Bandpasssignal keine Frequenzkomponenten für  $\theta \in [-\pi, 0]$  hat. Damit kann das Bandpasssignal einfach durch Modulation mit  $e^{-j\theta_0 n}$  in die Tiefpasslage verschoben werden (Abb. 2). Wir erhalten das zum unsymmetrischen Bandpasssignal gehörende **äquivalente Tiefpasssignal**  $x_l[n] = x_+[n]e^{-j\theta_0 n}$ .

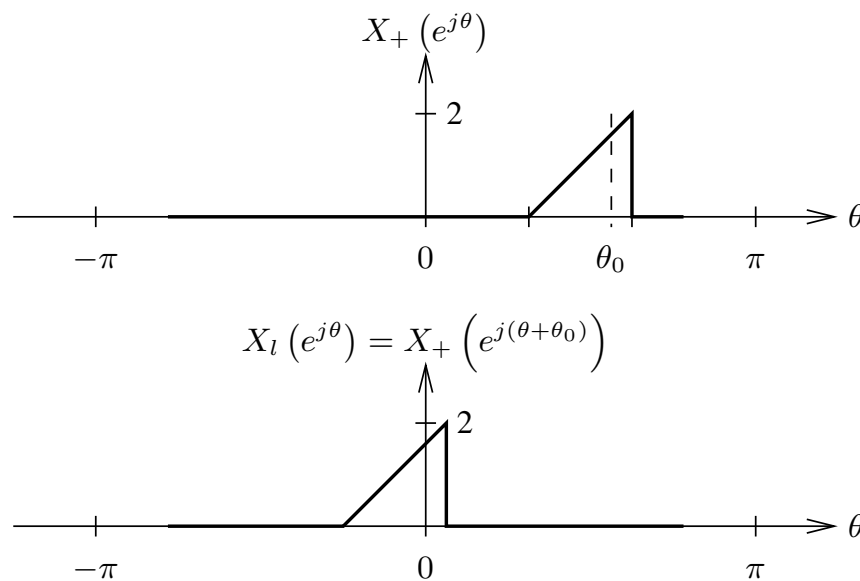


Abbildung 2: Spektrum des analytischen Signals (oben) und des äquivalenten Tiefpasssignals (unten)

Das analytische Signal  $x_+[n]$  ist komplexwertig, wobei der Realteil gleich dem ursprünglichen Signal  $x[n]$  ist und der Imaginärteil durch Anwendung der Hilberttransformation  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  auf  $x[n]$  gebildet wird. Dadurch ergibt sich mit  $x_+[n] = x[n] + j\mathcal{H}\{x[n]\}$  für das Spektrum

$$\begin{aligned} X_+(e^{j\theta}) &= X(e^{j\theta}) + \text{sign}(\theta)X(e^{j\theta}) \\ &= \begin{cases} 2X(e^{j\theta}) & 0 < \theta \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (5)$$

mit der Übertragungsfunktion des Hilberttransformators aus Gl. 6.22 (ohne linearen Phasenterm  $e^{-j\theta n_0}$ ). Für die Darstellung des allgemeinen Bandpasssignals erhalten wir somit

$$x[n] = \Re\{x_+[n]\} = \Re\{|x_+[n]| e^{j\varphi_+[n]}\} = |x_+[n]| \cos \varphi_+[n], \quad (6)$$

mit der **Einhüllenden**  $|x_+[n]|$  und der **Momentanphase**  $\varphi_+[n]$  des Signals  $x[n]$ . Ein allgemeines (unsymmetrisches) Bandpasssignal kann damit als amplituden- und phasenmoduliertes Signal dargestellt werden. Im Fall eines symmetrischen Bandpasssignals ergibt sich eine reine Amplitudenmodulation (siehe Gl. 6.14).

Eine alternative Darstellung erhalten wir mit dem äquivalenten Tiefpasssignal  $x_I[n] = x_+[n]e^{-j\theta_0 n}$ :

$$\begin{aligned} x[n] &= \Re\{x_I[n]e^{j\theta_0 n}\} = |x_I[n]| \cos(\theta_0 n + \varphi_I[n]) \\ &= x_I[n] \cos \theta_0 n - x_Q[n] \sin \theta_0 n, \end{aligned} \quad (7)$$

mit der **Inphasekomponente**  $x_I[n] = \Re\{x_I[n]\}$  und der **Quadraturkomponente**  $x_Q[n] = \Im\{x_I[n]\}$ . Der Vergleich von Gl. 6 mit Gl. 7 ergibt für die Einhüllende und die Momentanphase von  $x[n]$

$$|x_+[n]| = |x_I[n]| = \sqrt{x_I^2[n] + x_Q^2[n]} \quad (8)$$

$$\varphi_+[n] = \theta_0 n + \varphi_I[n] = \theta_0 n + \arctan \frac{x_Q[n]}{x_I[n]}. \quad (9)$$

Im folgenden MATLAB-Beispiel erzeugen wir ein amplituden- und phasenmoduliertes Signal mit dreieckförmiger Einhüllenden und linear ansteigender Frequenz (Chirp). Wir entwerfen mit `firpm()` einen Hilberttransformator und bilden damit das analytische Signal. Danach stellen wir die Einhüllende und die Momentanfrequenz (als Phasendifferenz) des Chirps graphisch dar (siehe Abb. 3).

```
% create amplitude-modulated chirp signal x[n]
```

```
N = 200;
n = 0:2*N-1;
n1 = n(1:N);
n2 = n(N+1:end);
theta0 = 2*pi*1/16;
x = [n1/N.*cos(theta0/N*n1.^2) (N-n1)/N.*cos(theta0/N*n2.^2)];
```

```

% form analytic signal using Hilbert transformer

j = 1i;
Nhil = 151;
df = 0.02;
hhil = firpm(Nhil-1,[df 1-df], [1 1], 'Hilbert');
Nd = floor((Nhil)/2);          % used to compensate delay of hhil
xh = filter(hhil,1,[x zeros(1,Nd)]);
xa = x + j*xh(Nd+1:2*N+Nd);    % analytic signal

env = abs(xa);                  % envelope of x[n]
dw = diff(unwrap(angle(xa)));   % instantaneous frequency of x[n]

close all
pos1 = [0.01 0.4 0.49 0.6];
figure('numbertitle','off','Position',pos1);

subplot(3,1,1), plot(n,x), grid on
title('amplitude-modulated chirp');
xlabel('n'), ylabel('x[n]');
subplot(3,1,2), plot(n,env), grid on
xlabel('n'), ylabel('envelope');
subplot(3,1,3), plot(n(1:end-1),dw), grid on
xlabel('n'), ylabel('instant. frequency');

```

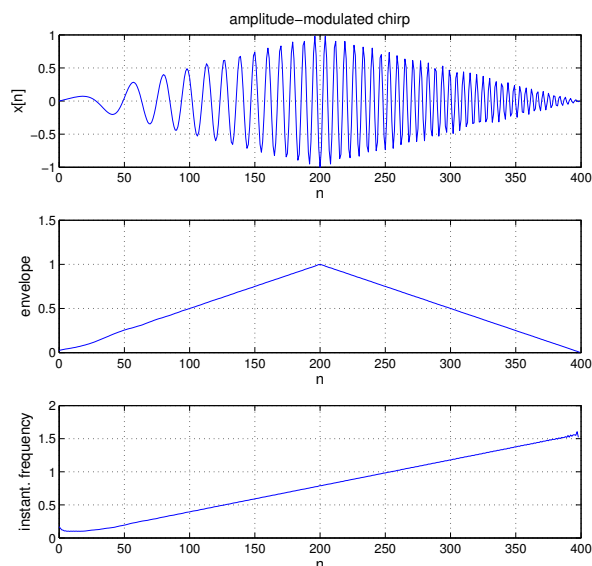


Abbildung 3: Einhüllende und Momentanfrequenz des amplitudenmodulierten Chirp-Signals

Seite 139, Gleichung (6.52) (Vorzeichenfehler):

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2j} \frac{cT}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{cT}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} \\ &= cT \frac{z^{-1} e^{-aT} \sin bT}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + z^{-2} e^{-2aT}} \\ &= cT \frac{z e^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}. \end{aligned}$$

Gleichung (6.53):

$$h[n] = cT e^{-aTn} \sin bTn \sigma[n]$$

Seite 140: In Abbildung 6.5 ist  $-cT$  durch  $cT$  zu ersetzen und der linke Pfad (von  $cT x[n]$  ausgehend) zum oberen Addierer zu entfernen (da im Zähler von  $H(z)$  nur ein Term mit  $z$  vorhanden ist).

Seite 147: Abschnitt nach Beispiel 6.11: „Allerdings zeigt die Impulsantwort *dieser* IIR-Filter eine minimale Signalverzögerung.“ Das Wort *dieser* bezieht sich auf die im Abschnitt 6.3.2 vorgestellten IIR-Filter mit Standardapproximationen des Frequenzgangs. IIR-Filter mit allgemeiner Übertragungsfunktion müssen nicht minimalphasig sein. Ein Beispiel ist ein Allpassfilter mit konstantem Betragsverlauf des Frequenzgangs. Pole und Nullstellen des analogen Referenzfilters liegen in der  $s$ -Ebene spiegelbildlich zur imaginären Achse. Beim zugehörigen digitalen Filter liefert die bilineare  $Z$ -Transformation Pole und Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis.

## 7 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Seite 172, Gleichung (7.35): **Ergänzung** für  $X[k + \frac{N}{2}]$ :

$$\begin{aligned} X[k] &= X_1[k] + W_N^k X_2[k], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] &= X_1\left[k + \frac{N}{2}\right] + W_N^{k + \frac{N}{2}} X_2\left[k + \frac{N}{2}\right] \\ &= X_1[k] - W_N^k X_2[k], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \end{aligned}$$

## 8 Multiratensignalverarbeitung

Seite 202, Gleichung (8.48):

Die Aufspaltung von  $g[m]$  ist falsch. Es muss die Polyphasenzerlegung von  $g[m]$  verwendet werden (siehe dazu auch die Formelsammlung auf Seite 219):

$$g[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{M-1} g[l+kM] \delta[m-l-kM], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.48)$$

Damit folgt durch Einsetzen in Gl. 8.47 und mit  $m = l + kM$  (wegen des  $\delta$ -Impulses)

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(n-k)M - l] \underbrace{g[l + kM]}_{q_l[k]} \\
 &= \sum_{l=0}^{M-1} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_l[n - k] q_l[k]}_{\text{lineare, zeitinvariante Filter}},
 \end{aligned}$$

## A Formeln für Fourier- und Z-Transformation

**Ergänzung** Seite 215 unten: Parsevalsche Beziehung für die diskrete Fouriertransformation (DFT):

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$