INSTITUT
FÜR NACHRICHTENTECHNIK
UND HOCHFREQUENZTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

VERARBEITUNG STOCHASTISCHER SIGNALE

Ergänzende Übungsbeispiele

Andreas Winkelbauer
(nach Vorlagen von Gerald Matz, Franz Hlawatsch und Martin Birgmeier)

Oktober 2010

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält ergänzende Übungsbeispiele zur VU "Verarbeitung Stochastischer Signale" (389.053). Diese Rechenaufgaben können im Selbststudium durchgearbeitet werden und entstammen urspünglich dem Übungsskriptum zur Vorlesung "Grundlagen Nachrichtentechnischer Signale" aus dem alten Studienplan. Dies ist auch der Grund warum der Text der Aufgabensammlung in Deutsch gehalten ist.

Die Anordnung der Aufgaben folgt weitestgehend der Kapitelstruktur des Vorlesungsskriptums. Die Notation in dieser Aufgabensammlung unterscheidet sich von jener des Vorlesungsskriptums insofern, als hier Zufallsgrößen fett gedruckt werden und Vektoren sowie Matrizen mit einem Unterstrich gekennzeichnet werden. In Kapitel 4 werden, im Unterschied zum Vorlesungsskriptum, vorwiegend zeitkontinuierliche Zufallsprozesse betrachtet. Die in der Vorlesung vermittelten Konzepte lassen sich ohne Weiteres auf diese Klasse von Zufallsprozessen übertragen.

Es sind fast alle Beispiele dieser Aufgabensammlung mit Lösungen versehen. Diese Lösungen sollen zur Selbstkontrolle und falls notwendig als Hilfestellung zum Finden eines Lösungsansatzes herangezogen werden.

Hinweise und Anregungen, die der Verbesserung dieser Aufgabensammlung dienen, sind jederzeit willkommen.

Wien, im Oktober 2010 *Andreas Winkelbauer*

1

Eine Zufallsvariable

Aufgabe 1.1: Geben Sie eine einfache obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P[A]$ der Vereinigung $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ von N Ereignissen A_i an, die nur die Wahrscheinlichkeiten $P[A_i]$ der einzelnen Ereignisse benützt („union bound“). *Lösung:* $P[A] \leq \sum_{i=1}^{N} P[A_i]$.

Aufgabe 1.2: Mariella gibt einen Überblick über ihre Liebesbeziehungen:

Ich hab in Penna einen Liebsten wohnen,
in der Maremmenebne einen andern,
Einen im schönen Hafen von Ancona,
Zum vierten muss ich nach Viterbo wandern;
Ein andrer wohnt in Casentino dort,
Der nächste lebt mit mir am selben Ort,
Und wieder einen hab ich in Magione,
Zwei in La Fratta, drei in Castiglione.

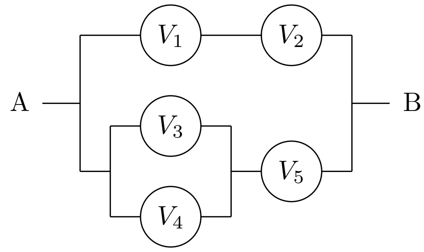
Mariella ruft drei verschiedene ihrer Liebhaber an; die Auswahl erfolgt dabei gleichwahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den angerufenen Liebhabern mindestens zwei am selben Ort wohnen? *Lösung:* $P[\textit{mindestens zwei am selben Ort}] = \frac{19}{110} \approx 0.173$.

Aufgabe 1.3: Beim Scheibenschießen trifft man mit Wahrscheinlichkeit p ins Schwarze. Wie oft muss man schießen, um mit Wahrscheinlichkeit $\geq q$ mindestens einmal ins Schwarze zu treffen? *Lösung:* $n \geq \frac{\log(1-q)}{\log(1-p)}$.

Aufgabe 1.4: Eine Nachrichtenquelle gibt eine Folge von Symbolen aus dem Alphabet $\{m_0, m_1, m_2\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $P[m_0] = 0.5$, $P[m_1] = 0.25$ und $P[m_2] = 0.25$ ab. Die einzelnen Symbole der Folge sind statistisch unabhängig. Aus der Symbolfolge wird ein Block mit drei Symbolen herausgegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im gegebenen Block jedes der drei Symbole m_0, m_1, m_2 genau einmal vorkommt? *Lösung:* $P[A] = 3/16 = 0.1875$.

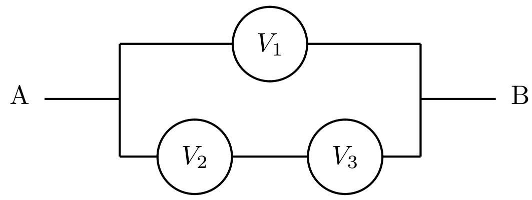
Aufgabe 1.5: Bei der Übertragung einer Nachricht werden 9 kaskadierte Verstärker verwendet. Die Verstärker fallen statistisch unabhängig voneinander aus wobei die Ausfallswahrscheinlichkeit bei fünf Verstärkern 0.01 und bei den anderen vier 0.005 beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nachricht nicht übertragen werden kann? *Lösung:* $P = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5 \left(\frac{199}{200}\right)^4 \approx 0.068$.

Aufgabe 1.6: Eine Nachricht soll vom Ort A zum Ort B übertragen werden. Dazu steht das folgende Netz aus Vermittlungsstellen V_1 bis V_5 zur Verfügung:



Die Vermittlungsstellen V_i fallen statistisch unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P = 0.01$ aus. Ist eine Vermittlungsstelle ausgefallen, dann kann über sie keine Nachricht übertragen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nachricht von A nach B übertragen werden kann? *Lösung:* $P[A \to B] = 1 - [1 - (1 - P^2) * (1 - P)] * [1 - (1 - P)^2] \approx 0.9998$.

Aufgabe 1.7: Eine Nachricht soll von A nach B übertragen werden. Dazu steht das abgebildete Netz aus drei Vermittlungsstellen V_1, V_2 und V_3 zur Verfügung. V_1 ist mit Wahrscheinlichkeit 0.02 statistisch unabhängig von V_2 und V_3 defekt. V_2 ist mit Wahrscheinlichkeit 0.04 defekt, und V_3 mit Wahrscheinlichkeit 0.06. Wenn V_2 defekt ist, ist V_3 mit Wahrscheinlichkeit 0.3 ebenfalls defekt. Über defekte Vermittlungsstellen können keine Nachrichten übertragen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachricht von A nach B übertragen werden kann? *Lösung:* $P = 0.99824$.



Aufgabe 1.8: Von jenen Studenten, die sich für die GNS-Prüfung vorbereiten, bestehen 90% die Prüfung. Von jenen, die sich nicht vorbereiten, bestehen bloß 20%. 75% der Studenten bereiten sich auf die GNS-Prüfung vor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Student sich vorbereitet, wenn er die Prüfung bestanden hat?
Lösung: $P[vorbereitet|bestanden] = 0.9\frac{0.75}{0.725} \approx 0.931$.

Aufgabe 1.9: Zwei binäre Quellen A und B geben jeweils eine Folge von Symbolen aus dem Alphabet $\{m_0, m_1\}$ mit Wahrscheinlichkeit $P_A[m_0] = 0.1$ und $P_B[m_0] = 0.05$ ab. Dabei sind nacheinander abgegebene Symbole statistisch unabhängig. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit wird eine der beiden Quellen ausgewählt, und N Symbole aus der von dieser Quelle gesendeten Folge aufgezeichnet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei allen N Symbolen um m_0 handelt.

b) Berechnen Sie in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Quelle A (Quelle B) ausgewählt worden ist.

Lösung: a) $P[N\text{-}mal\ m_0] = 0.05^N(2^N+1)/2$; *b)* $P[Quelle\ A\,|\,N\text{-}mal\ m_0] = 1/(1+2^{-N})$; $P[Quelle\ B\,|\,N\text{-}mal\ m_0] = 1/(2^N+1)$.

Aufgabe 1.10: Zur Übertragung einer Symbolkette werden zwei gestörte Übertragungskanäle A und B verwendet, wobei 20% der Symbole über Kanal A übertragen werden. Es wird 1% der Symbole falsch empfangen wobei ein falsch empfangenes Symbol mit Wahrscheinlichkeit 1/15 über Kanal A übertragen wurde.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein über Kanal A übertragenes Symbol falsch empfangen wird?

b) Welcher der beiden Kanäle besitzt die kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit?

Lösung: a) $P[E|A] = 1/300$; *b)* $P[E|B] = 7/600$; *Kanal A ist zuverlässiger.*

Aufgabe 1.11: Ein Netzwerk-Server besteht aus folgenden Komponenten:

- einer CPU, die mit Wahrscheinlichkeit 10^{-2} defekt ist;
- einer Hauptplatte, die aus drei billigen Einzelplatten besteht, von denen mindestens eine funktionieren muss, damit die Hauptplatte funktioniert. Jede der Einzelplatten ist mit Wahrscheinlichkeit 0.1 defekt;
- zwei Benutzerplatten, die mit Wahrscheinlichkeit 0.1 defekt sind.

Die einzelnen Komponenten sind statistisch unabhängig voneinander defekt. Der Server ist funktionsfähig, wenn die CPU, die Hauptplatte und mindestens eine der Benutzerplatten funktionieren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Server funktionsfähig ist? *Lösung:* $P \approx 0.979$.

Aufgabe 1.12: Eine Maschine ist mit Wahrscheinlichkeit 2% defekt. Bei Überlast wird sie mit Wahrscheinlichkeit 21% defekt, ansonsten mit 1%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Überlast?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Überlast aufgetreten ist, obwohl die Maschine nicht defekt ist?

Lösung: a) $P[\,\textit{Überlast}] = 0.05$*; b)* $P[\,\textit{Überlast}\,|\,\textit{kein Defekt}] \approx 0.04$.

Aufgabe 1.13: Wie groß sind die Empfangswahrscheinlichkeiten für einen binären symmetrischen Kanal mit $\varepsilon = 0.2$ wenn $P[m_0] = 0.3$? *Lösung:* $P[r_0] = 0.38$, $P[r_1] = 0.62$.

Aufgabe 1.14: Die Dauer eines Ferngesprächs wird durch eine Zufallsvariable $\boldsymbol{T}$ modelliert, wobei

$$p_{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-at}, & \text{für } t \geq 0, \\ 0, & \text{für } t < 0, \end{cases} \qquad \text{mit } a = \frac{1}{2\,\text{min}}\,.$$

a) Berechnen Sie die Konstante λ.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch zwischen 10 und 15 Minuten dauert.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch weniger als 10 Minuten dauert.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch mehr als 15 Minuten dauert.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch insgesamt zwischen 10 und 15 Minuten dauert, wenn es bereits 8 Minuten gedauert hat.

Lösung: a) $\lambda = a$*; b)* $P[10 < \boldsymbol{T} < 15] = e^{-\frac{10}{2}} - e^{-\frac{15}{2}} \approx 6.2 \times 10^{-3}$*; c)* $P[\boldsymbol{T} < 10] = 1 - e^{-\frac{10}{2}} \approx 0.993$*; d)* $P[\boldsymbol{T} > 15] = e^{-\frac{15}{2}} \approx 5.5 \times 10^{-4}$*; e)* $P[10 < \boldsymbol{T} < 15 | \boldsymbol{T} > 8] \approx 0.338$.

Aufgabe 1.15: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gauß-verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 2 und Varianz 4 im Intervall $[-3, 5]$ liegt? *Lösung:* $P[-3 \leq \boldsymbol{x} \leq 5] \approx 0.927$.

Aufgabe 1.16: Es sei $\boldsymbol{x}$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 5 und Varianz 3. Durch „Clipping“ wird aus $\boldsymbol{x}$ eine neue Zufallsvariable $\boldsymbol{y}$ wie folgt gebildet:

$$\boldsymbol{y} = \begin{cases} 3, & \boldsymbol{x} \leq 3 \\ \boldsymbol{x}, & 3 < \boldsymbol{x} < 7 \\ 7, & \boldsymbol{x} \geq 7 \end{cases}$$

Bestimmen und skizzieren Sie die WDF der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$.

Aufgabe 1.17: Es sei $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + b$ mit a, b determiniert und $\boldsymbol{x}$ gleichverteilt zwischen -1 und 1. Berechnen Sie die WDF von $\boldsymbol{y}$. *Lösung:* $p_{\boldsymbol{y}}(\eta) = \frac{1}{|a|} p_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\eta - b}{a}\right)$.

Aufgabe 1.18: Die Spannung U_e am Eingang eines Verstärkers mit Verstärkungsfaktor 10 ist eine Gauß-verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0.2 V und Standardabweichung 1.5 V.

a) Zeigen Sie mit der Transformationsformel für Zufallsvariablen, dass die Ausgangsspannung U_a des Verstärkers ebenfalls Gauß-verteilt ist, und berechnen Sie deren Mittelwert und Varianz.

b) Nehmen Sie nun an, dass der Verstärker die Ausgangsspannung auf den Bereich von -12.0 V bis 13.0 V begrenzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Verstärker im linearen Bereich betrieben wird?

Lösung: a) $\mu_{U_a} = 2\ V$, $\sigma^2_{U_a} = 225\ V^2$*; b)* $P[-1.2\ V \leq U_e \leq 1.3\ V] \approx 0.593$.

Aufgabe 1.19: Wie groß sind Mittelwert und Varianz einer im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$?

Lösung: $\mu_{\boldsymbol{x}} = 1/2$; $\sigma^2_{\boldsymbol{x}} = 1/12$.

Aufgabe 1.20: Die Zufallvariable $\boldsymbol{x}$ ist gleichverteilt im Intervall $[-1, 3]$. Berechnen Sie Mittelwert, quadratischen Mittelwert und Varianz der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}^2 + 2$. *Lösung:* $\mu_{\boldsymbol{y}} = 9$; $\rho^2_{\boldsymbol{y}} = 141.8$; $\sigma^2_{\boldsymbol{y}} = 60.8$.

Aufgabe 1.21: Die Verteilungsfunktion der Lebensdauer $\boldsymbol{T}$ eines Bauteils ist

$$F_{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

mit $\alpha = 1/(400\,\mathrm{h})$. Berechnen Sie

a) die WDF der Zufallsvariablen $\boldsymbol{T}$,

b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200\mathrm{h}$ und $t_2 = 300\mathrm{h}$ ausfällt,

c) die mittlere Lebensdauer des Bauteils.

Lösung: a) $p_{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{cases} \alpha^2 t e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$; *b)* $P[t_1 < \boldsymbol{T} < t_2] = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{4}e^{-\frac{3}{4}} \approx 0.08315$; *c)* $\mu_{\boldsymbol{T}} = 800\,h$.

Aufgabe 1.22: Ein Sinussignal wird über einen N-Bit ADC und einen N-Bit DAC übertragen. Dabei wird der Quantisierungsfehler als im Quantisierungsintervall gleichverteilte Zufallsvariable modelliert. Welcher Signal-Rausch-Abstand (d.h. Verhältnis von mittlerer Signalleistung zu mittlerer Rauschleistung) ergibt sich bei Vollaussteuerung? *Lösung:* $S/N = 6 \cdot 2^{2(N-1)} \approx (1.76 + 6N)\,dB$.

Aufgabe 1.23: Es sei $\boldsymbol{x}$ eine zwischen -1 und 1 gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit $p(\alpha) = P[|\boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}| \geq \alpha]$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der von der Tschebyscheffschen Ungleichung gelieferten Abschätzung. *Lösung: Exaktes Ergebnis:* $p(\alpha) = P[|\boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}| \geq \alpha] = \begin{cases} 0, & |\alpha| > 1 \\ 1 - \alpha, & |\alpha| \leq 1 \end{cases}$; *Tschebyscheffsche Ungleichung:* $p(\alpha) \leq 1/(3\alpha^2)$.

Aufgabe 1.24: Zehn Widerstände mit Nennwiderstand $100\,\Omega$ und Toleranz $\pm 10\%$ werden in Serie geschaltet. Die Widerstandswerte sind statistisch unabhängig und Gauß-verteilt. Die Toleranzgrenzen sind jene zwei Werte, zwischen denen 90% der tatsächlichen Widerstandswerte liegen.

a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand der Serienschaltung im Mittel?

b) Bestimmen Sie die Toleranz des Gesamtwiderstandes.

Lösung: a) $R_{gesamt} = 1\,k\Omega$; *b)* $\pm\sqrt{10}\%$.

Aufgabe 1.25: Gegeben sei eine binäre Quelle mit $P[m_0] = 1/2$ und ein binärer Kanal mit bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten $P[r_1|m_0] = 2 \cdot 10^{-6}$ und $P[r_0|m_1] = 6 \cdot 10^{-6}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Übertragung einer aus 10^5 Symbolen bestehenden Nachricht mehr als zwei Fehler auftreten? *Lösung:* $P \approx 0.008$.

Aufgabe 1.26: Die in einer Telefonzentrale eintreffenden Anrufe werden als Poisson-verteilte Zufallsvariable modelliert. Im Durchschnitt treffen 240 Anrufe pro Stunde ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 30 Sekunden mehr als 3 Anrufe eintreffen? *Lösung:* $P \approx 0.143$.

Aufgabe 1.27: Die Anzahl von Autos, die durch eine Zählstelle fahren, wird durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable modelliert. Es ist bekannt, dass durchschnittlich 600 Autos pro Stunde an der Zählstelle vorbeifahren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute weniger als drei Autos vorbeifahren? *Lösung:* $P = (10^0/0! + 10^1/1! + 10^2/2!)\,e^{-10} \approx 0.00277$.

Aufgabe 1.28: Die Verteilungsfunktion der Lebensdauer $\boldsymbol{T}$ eines Bauteils ist

$$F_{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/T_0}, & t \geq 0\,, \\ 0, & t < 0\,, \end{cases}$$

mit $T_0 = 24000\,\mathrm{h}$. Es werden Serien von 10000 Bauteilen produziert.

a) Wie viele defekte Bauteile treten während der Produktionsprüfung einer Serie (24 h Dauerbetrieb) im Mittel auf?

b) Wie viele Bauteile einer Serie überleben im Mittel die Garantiezeit von 6 Monaten?

c) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Bauteils?

Lösung: a) $P[\boldsymbol{N} = n] = \binom{m}{n}\varepsilon^n(1-\varepsilon)^{m-n}$ *mit* $\varepsilon = 1 - e^{-(10^{-3})}$; *b)* $P[\boldsymbol{N} = n] = \binom{m}{n}\gamma^n(1-\gamma)^{m-n}$ *mit* $\gamma = e^{-\frac{4380}{24000}}$; *c)* $E\{\boldsymbol{T}\} = T_0 = 24000\,h$.

Aufgabe 1.29: Die Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ ist Gauß-verteilt mit Mittelwert 1. Weiters ist bekannt, dass $P[\boldsymbol{x} > -2] = 0.96$. Bestimmen Sie die Varianz von $\boldsymbol{x}$. *Lösung:* $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2 \approx 2.939$.

Aufgabe 1.30: Ein Kondensator mit einer Nennkapazität von 10 nF und einer Toleranz von ±10% wird mit einem Kondensator mit einer Nennkapazität von 5 nF und einer Toleranz von ±20% parallel geschaltet. Die Kapazitäten der Kondensatoren sind statistisch unabhängig und gleichverteilt im jeweiligen Toleranzintervall. Berechnen und zeichnen Sie die WDF der Gesamtkapazität. *Lösung:* $p_{\boldsymbol{C}}(\gamma) = (2 - |\gamma - 15|)/4$ *im Intervall* $13\,nF \leq \gamma \leq 17\,nF$ *und* $p_{\boldsymbol{C}}(\gamma) = 0$ *sonst.*

Aufgabe 1.31: Ein Widerstand besteht aus der Serienschaltung von vier Einzelwiderständen, deren Widerstandswerte jeweils Gauß-verteilt sind mit Mittelwert 100 Ω und Streuung 0.1 Ω. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtwiderstand zwischen 399.5 Ω und 400.5 Ω liegt? *Lösung:* $P[399.5\,\Omega < \boldsymbol{R} < 400.5\,\Omega] = 2\Phi(2.5) - 1 \approx 0.9876$.

Aufgabe 1.32: Ein Kondensator besteht aus der Parallelschaltung von zehn Einzelkondensatoren, deren Kapazitäten Gauß-verteilt mit Mittelwert 100 nF und Streuung 2 nF sind.

a) Berechnen Sie die WDF der Gesamtkapazität.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Gesamtkapazität zwischen 0.99 μF und 1.01 μF?

Lösung: a) Die Gesamtkapazität ist Gauß-verteilt mit Mittelwert $\mu_{\boldsymbol{C}} = 1\,\mu F$ *und Streuung* $\sigma_{\boldsymbol{C}} = \sqrt{40}\,nF$*;*
b) $P[\,990\,nF < \boldsymbol{C} < 1010\,nF] \approx 0.8858$.

2

Zwei Zufallsvariablen

Aufgabe 2.1: Berechnen Sie die bedingten WDF und die Verbund-WDF zweier identischer Zufallsvariablen. *Lösung:* $p_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}(\xi_1,\xi_2) = p_{\boldsymbol{x}_2}(\xi_2)\,\delta(\xi_1-\xi_2)$.

Aufgabe 2.2: Es sei $\boldsymbol{x}$ gleichverteilt im Intervall $[a,b]$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - 1$. Berechnen und skizzieren Sie die bedingte WDF $p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}(\eta|\xi)$ und die Verbund-WDF $p_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(\xi,\eta)$. *Lösung:* $p_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(\xi,\eta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}\,\delta(\eta-\xi+1), & a<\xi<b, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 2.3: Die diskrete Zufallsvariable $\boldsymbol{s}$ nimmt die Werte -1 und 1 gleichwahrscheinlich an. Berechnen Sie die WDF der Zufallsvariablen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{n}$, wenn $\boldsymbol{n}$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1 sowie statistisch unabhängig von $\boldsymbol{s}$ ist. *Lösung:* $p_{\boldsymbol{r}}(\rho) = \left(e^{-\frac{1}{2}(\rho+1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\rho-1)^2}\right)/\sqrt{8\pi}$.

Aufgabe 2.4: Es seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei Zufallsvariablen mit $\mu_{\boldsymbol{x}} = 3$, $\rho_{\boldsymbol{y}}^2 = 5$ und $R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = -2$.

a) Berechnen Sie jenes a, für das $E\left\{(\boldsymbol{x}-a)^2\right\}$ minimal ist.

b) Berechnen Sie jenes a, für das $E\left\{(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{y})^2\right\}$ minimal ist.

Lösung: a) $a = \mu_{\boldsymbol{x}} = 3$; *b)* $a = R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}/\rho_{\boldsymbol{y}}^2 = -2/5$.

Aufgabe 2.5: Die Zufallsvariable $\boldsymbol{y}$ ist durch $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2$ definiert, wobei die WDF $p_{\boldsymbol{x}}(\xi)$ eine *gerade* Funktion ist.

a) Berechnen Sie den Mittelwert von $\boldsymbol{x}$.

b) Berechnen Sie die Korrelation von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ für *allgemeines* $p_{\boldsymbol{x}}(\xi)$.

c) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ unkorreliert sind, wenn $p_{\boldsymbol{x}}(\xi)$ eine gerade Funktion ist.

Lösung: a) $\mu_{\boldsymbol{x}} = 0$; *b)* $R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = E\{\boldsymbol{x}^3\}$.

Aufgabe 2.6: Von einer Zufallsvariablen $\boldsymbol{X}$ werden zwei durch additives Rauschen $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{V}$ gestörte Versionen $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}+\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}+\boldsymbol{V}$ beobachtet, wobei $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{V}$ von $\boldsymbol{X}$ statistisch unabhängig sind. Die Zufallsvariablen $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{V}$ sind mittelwertfrei und durch die Varianzen $\sigma_{\boldsymbol{X}}^2$ und $\sigma_{\boldsymbol{W}}^2 = \sigma_{\boldsymbol{V}}^2 = \sigma^2$ beschrieben. Schließlich gelte $E\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}\} = \alpha\sigma^2$.

a) Berechnen Sie mit der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung $|E\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\}| \le \sqrt{E\left\{\boldsymbol{A}^2\right\}E\left\{\boldsymbol{B}^2\right\}}$ den möglichen Wertebereich für α.

b) Berechnen Sie $E\{\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Z}\}$.

c) Zwei mögliche Schtäzer für die Zufallsvariable $\boldsymbol{X}$ sind $\hat{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{Y}$ und $\hat{\boldsymbol{X}}_2 = \frac{\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}}{2}$. Für welche Werte von α gilt $E\{(\hat{\boldsymbol{X}}_2-\boldsymbol{X})^2\} \le E\{(\hat{\boldsymbol{X}}_1-\boldsymbol{X})^2\}$?

d) Für welche Werte von α sind $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}$ unkorreliert?

Lösung: a) $|\alpha| \leq 1$; *b)* $E\{\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Z}\} = \sigma_{\boldsymbol{X}}^2 + \alpha\,\sigma^2$; *c) und d) für alle gültigen Werte.*

Aufgabe 2.7: Es seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei Zufallsvariablen mit $\mu_{\boldsymbol{x}} = 1$, $\mu_{\boldsymbol{y}} = 5$, $\rho_{\boldsymbol{x}}^2 = 4$ und $C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = 3$. Eine weitere Zufallsvariable $\boldsymbol{z}$ wird durch $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ definiert.

a) Berechnen Sie die Korrelation $R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}}$.

b) Ermitteln Sie jenen Wert a, für den $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{z}$ orthogonal sind.

c) Berechnen Sie die Kovarianz $C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}}$ für den in Punkt b) erhaltenen Wert von a.

Lösung: a) $R_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}} = 4a + 8$; *b)* $a = -2$; *c)* $C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}} = -3$.

Aufgabe 2.8: Aus zwei mittelwertfreien Zufallsvariablen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ mit mittleren Leistungen $\rho_{\boldsymbol{b}}^2$ und $\rho_{\boldsymbol{c}}^2$ und Korrelation $R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}$ wird durch $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \gamma\,\boldsymbol{c}$ eine weitere Zufallsvariable gebildet.

a) Für welches γ sind die Zufallsvariablen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ unkorreliert?

b) Für welches γ ist der quadratische Mittelwert von $\boldsymbol{a}$ minimal?

Lösung: a) $\gamma = \rho_{\boldsymbol{b}}^2 / R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}$; *b)* $\gamma = R_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}} / \rho_{\boldsymbol{c}}^2$.

3

Zufallsvektoren

Aufgabe 3.1: Gegeben seien N unkorrelierte Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ mit Varianz $\sigma^2_{\boldsymbol{x}_i} = 1$. Durch die affine Transformation

$$\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{A}\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{b},, \qquad \text{mit } \underline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)^T \quad \text{und } \underline{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_N)^T,$$

werden N neu Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}_i$ definiert. Hierbei ist $\underline{A}$ eine determinierte $N \times N$ Matrix und $\underline{b}$ ein determinierte N-dimensionaler Vektor. Welche Eigenschaften müssen $\underline{A}$ und $\underline{b}$ besitzen, damit die Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}_i$ wieder unkorreliert mit Varianz $\sigma^2_{\boldsymbol{y}_i} = 1$ sind? *Lösung: $\underline{A}$ muss orthogonal sein, d.h. $\underline{A}\underline{A}^T = \underline{I}$; $\underline{b}$ ist beliebig.*

Aufgabe 3.2: Gegeben seien N Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ mit Korrelationen $R_{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j}$ und quadratischen Mittelwerten $\rho^2_{\boldsymbol{x}_i} = R_{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i}$. Betrachten Sie N Linearkombinationen $\boldsymbol{y}_j$ der Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}_i$,

$$\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{A}\,\underline{\boldsymbol{x}}, \qquad \text{mit } \underline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)^T \quad \text{und } \underline{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_N)^T.$$

Konstruieren Sie eine Matrix $\underline{A}$ derart, dass die Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}_j$ orthonormal (d.h. orthogonal mit normiertem quadratischen Mittelwert $\rho^2_{\boldsymbol{y}_i} = 1$) sind. *Lösung: Jede Matrix $\underline{A} = \underline{B}^{-1}$ mit $\underline{B}\underline{B}^T = \underline{R}_{\boldsymbol{x}}$ ist eine gültige Lösung.*

Aufgabe 3.3: Die Korrelationsmatrix des aus drei Zufallsvariablen bestehenden Vektors $\underline{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]^T$ ist

$$R_{\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{x}}} = E\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{x}}^T\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Aus $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ wird ein linearer Schätzer $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$ für $\boldsymbol{x}_3$ gebildet. Berechnen Sie jene Werte für a und b, welche den mittleren quadratische Schätzfehler $E\{\boldsymbol{e}_3^2\}$ mit $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \hat{\boldsymbol{x}}_3$ minimieren.

b) Berechnen Sie die Korrelation von $\boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_1$.

Lösung: a) $-a = b = 1$; b) $E\{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{x}_1\} = 0$.

Aufgabe 3.4: Charakterisieren Sie die Kovarianzmatrix von N unkorrelierten Zufallsvariablen und berechnen Sie deren Inverse und Determinante.

Aufgabe 3.5: Ein Signalvektor $\underline{\boldsymbol{s}} = \binom{\boldsymbol{s}_1}{\boldsymbol{s}_2}$ mit Mittelwert $\underline{\mu}_{\boldsymbol{s}} = \binom{0}{0}$ und Autokorrelationsmatrix $\underline{R}_{\boldsymbol{s}} = E\left\{\underline{\boldsymbol{s}}\underline{\boldsymbol{s}}^T\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ wird durch einen (von $\underline{\boldsymbol{s}}$ statistisch unabhngigen) Rauschvektor $\underline{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2}$ mit Mittelwert $\underline{\mu}_{\boldsymbol{n}} = \binom{0}{0}$ und Autokorrelationsmatrix $\underline{R}_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ gestört. Aus dem gestörten Vektor $\underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{s}} + \underline{\boldsymbol{n}}$ wird mit einer Matrix $\underline{H}$ ein Schätzwert $\hat{\underline{\boldsymbol{s}}} = \underline{H}\,\underline{\boldsymbol{r}}$ für den Vektor $\underline{\boldsymbol{s}}$ gebildet.

a) Wie muss die Matrix $\underline{H}$ gewählt werden, damit der mittlere quadratische Schätzfehler $\varepsilon = E\left\{\|\underline{\hat{\boldsymbol{s}}} - \underline{\boldsymbol{s}}\|^2\right\} = E\left\{(\hat{\boldsymbol{s}}_1 - \boldsymbol{s}_1)^2 + (\hat{\boldsymbol{s}}_2 - \boldsymbol{s}_2)^2\right\}$ minimal wird?

b) Wie groß ist der resultierende minimale Schätzfehler $\varepsilon_{\min}$?

Lösung: a) $\underline{H} = \left(\begin{smallmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{smallmatrix}\right)$*; b)* $\varepsilon_{\min} = 2/3$.

4

Stochastische Prozesse

Aufgabe 4.1: Berechnen Sie Mittelwert und AKF des konstanten stochastischen Prozesses $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}$.

Aufgabe 4.2: Berechnen Sie Mittelwert, mittlere Leistung, Varianz, AKF und Autokovarianzfunktion des stochastischen Prozesses $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 t)$.

Aufgabe 4.3: Ein stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\boldsymbol{a}t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{a}$ die Werte 1 und 2 mit den Wahrscheinlichkeiten $P[\boldsymbol{a} = 1] = 0.8$ und $P[\boldsymbol{a} = 2] = 0.2$ annimmt. Berechnen Sie Mittelwert, mittlere Leistung und AKF von $\boldsymbol{x}(t)$. *Lösung:* $\mu_{\boldsymbol{x}}(t) = 0.8\,e^{-t} + 0.2\,e^{-2t}$, *für* $t \geq 0$; $\rho^2_{\boldsymbol{x}}(t) = 0.8e^{-2t} + 0.2e^{-4t}$, *für* $t \geq 0$; $R_{\boldsymbol{x}}(t_1, t_2) = 0.8e^{-(t_1+t+2)} + 0.2e^{-2(t_1+t_2)}$, *für* $t_1, t_2 \geq 0$.

Aufgabe 4.4: Ein impulsdauermoduliertes Signal $\boldsymbol{x}(t)$ besteht aus aufeinanderfolgenden Impulsen unterschiedlicher Länge. Der k-te Impuls beginnt zum Zeitpunkt kT und hat eine zufällige Dauer $\boldsymbol{T}_k$. Die Impulslängen $\boldsymbol{T}_k$ sind voneinander statistisch unabhängig und im Intervall $[0, T[$ gleichverteilt.

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\mu_{\boldsymbol{x}}(t)$ von $\boldsymbol{x}(t)$.

b) Berechnen Sie die AKF $R_{\boldsymbol{x}}(t_1, t_2)$ von $\boldsymbol{x}(t)$.

Lösung: a) $\mu_{\boldsymbol{x}}(t) = 1 - (t \mod T)/T$;

b) $R_{\boldsymbol{x}}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 - \max(t_1 \mod T, t_2 \mod T)/T, & t_1,\ t_2 \text{ im selben Intervall,} \\ \big[1 - (t_1 \mod T)/T\big] \cdot \big[1 - (t_2 \mod T)/T\big], & t_1,\ t_2 \text{ in verschiedenen Intervallen.} \end{cases}$

Aufgabe 4.5: Gegeben sei der stochastischer Prozess

$$\boldsymbol{x}(t) = (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})t$$

mit mittelwertfreien, statistisch unabhängigen Zufallsvariablen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ der Varianz $\sigma^2_{\boldsymbol{a}} = \sigma^2_{\boldsymbol{b}} = 1$. Die Konstante k ist determiniert.

a) Berechnen Sie den Mittelwert von $\boldsymbol{x}(t)$.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $\boldsymbol{x}(t)$.

c) Berechnen Sie die mittlere Leistung von $\boldsymbol{x}(t)$.

d) Ist der stochastische Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ stationär?

Lösung: a) $E\{\boldsymbol{x}(t)\} = 0$; *b)* $R_{\boldsymbol{x}}(t_1, t_2) = t_1\, t_2\, (k^2 + 1)$; *c)* $\rho^2_{\boldsymbol{x}}(t) = t^2(1 + k^2)$; *d) nein.*

Aufgabe 4.6: Gegeben sei der stochastische Prozess

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-\boldsymbol{a}t},$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{a}$ gleichverteilt zwischen 0 und 1 ist.

a) Berechnen Sie den Mittelwert von $\boldsymbol{x}(t)$.

b) Berechnen Sie die AKF von $\boldsymbol{x}(t)$.

c) Ist der Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ (schwach) stationär?

Lösung: a) $\mu_{\boldsymbol{x}}(t) = (1 - e^{-t})/t$; *b)* $R_{\boldsymbol{x}}(t_1, t_2) = (1 - e^{-t_1 - t_2})/(t_1 + t_2)$; *c) nein.*

Aufgabe 4.7: Ein stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ hat die drei Realisierungen $x(t; \omega_1) = 1$, $x(t; \omega_2) = 0$ und $x(t; \omega_3) = -1$. Ein zweiter stochastischer Prozess $\boldsymbol{y}(t)$ hat die fünf Realisierungen $y(t; \omega_1) = t$, $y(t; \omega_2) = 1$, $y(t; \omega_3) = 0$, $y(t; \omega_4) = -1$ und $y(t; \omega_5) = -t$. Die einzelnen Realisierungen beider Prozesse treten dabei mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Berechnen Sie $\mu_{\boldsymbol{x}}(t)$, $\mu_{\boldsymbol{y}}(t)$, $R_{\boldsymbol{x}}(t, \tau)$ und $R_{\boldsymbol{y}}(t, \tau)$.

b) Ist $\boldsymbol{x}(t)$ bzw. $\boldsymbol{y}(t)$ schwach stationär?

Aufgabe 4.8: Berechnen Sie die Größen der schwachen Beschreibung für den stationären stochastischen Prozess, der dem stochastischen Prozess $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 t)$ zugeordnet ist.

Aufgabe 4.9: Bei einer Messung soll eine Gleichspannung $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{V}$ gemessen werden. Dabei ist $\boldsymbol{V}$ eine zwischen $-V_0$ und $+V_0$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Die Messung wird durch statistisch unabhängiges, additives, stationäres, mittelwertfreies Rauschen $\boldsymbol{n}(t)$ mit Leistungsdichtespektrum

$$G_{\boldsymbol{n}}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2}, & |\omega| < \omega_g \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gestört. Es werden N Messungen zu den Zeitpunkten $0, T_0, \ldots, (N-1)T_0$ mit $T_0 = \pi/\omega_g$ durchgeführt. Als endgültiges Messergebnis wird das arithmetische Mittel der einzelnen Messungen gebildet:

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\boldsymbol{v}(kT_0) + \boldsymbol{n}(kT_0)]$$

a) Bestimmen Sie die mittlere Signalleistung $\rho^2_{\boldsymbol{v}}$ und die mittlere Rauschleistung $\rho^2_{\boldsymbol{n}}$.

b) Berechnen Sie das Signal-/Rauschleistungsverhältnis $S/N = \rho^2_{\boldsymbol{v}}/\rho^2_{\boldsymbol{n}}$.

c) Zeigen Sie, dass die Rauschabtastwerte $\boldsymbol{n}(kT_0)$ paarweise unkorreliert sind.

d) Zeigen Sie, dass sich die Varianz des Messwerts $\hat{\boldsymbol{V}}$ in einen reinen Signalanteil und einen reinen Rauschanteil separieren lt. Berechnen Sie das Signal-Rauschleistungsverhältnis von $\hat{\boldsymbol{V}}$ als Quotient dieser zwei Anteile und vergleichen Sie es mit jenem aus Punkt b).

Lösung: a) $\rho^2_{\boldsymbol{v}} = V_0^2/3$, $\rho^2_{\boldsymbol{n}} = \eta\omega_g/2\pi$; *b)* $S/N = 2\pi V_0^2/(3\eta\omega_g)$; *c)* $E\{\boldsymbol{n}(kT_0)\, \boldsymbol{n}(lT_0)\} = R_{\boldsymbol{n}}((k-l)T_0) = \delta_{kl}$; *d)* $S/N = 2\pi V_0^2/(3N\eta\omega_g)$.

Aufgabe 4.10: Wie lautet das LDS des sinusförmigen stochastischen Prozesses $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi})$, wenn $\boldsymbol{\varphi}$ gleichverteilt zwischen 0 und 2π sowie statistisch unabhängig von $\boldsymbol{A}$ ist?

Aufgabe 4.11: Gegeben ist der stochastische Prozess $\boldsymbol{x}(t) = f(t - \boldsymbol{\Theta})$, wobei $f(t)$ eine T-periodische, determinierte Funktion ist und die Zufallsvariable $\boldsymbol{\Theta}$ gleichverteilt im Intervall $[0, T]$ ist.

a) Berechnen Sie Mittelwert, AKF und LDS von $\boldsymbol{x}(t)$ für allgemeines $f(t)$.

b) Berechnen Sie Mittelwert, AKF und LDS von $\boldsymbol{x}(t)$ für $f(t) = A\cos(2\pi t/T)$.

Aufgabe 4.12: Gegeben sei ein reeller T-periodischer stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ mit Fourierkoeffizienten $\boldsymbol{c}_n$ deren Mittelwerte $\mu_{\boldsymbol{c}}(n) = E\{\boldsymbol{c}_n\}$ und mittlere Leistungen $\rho_{\boldsymbol{c}}^2(n) = E\left\{|\boldsymbol{c}_n|^2\right\}$ bekannt sind. Berechnen Sie Mittelwert, AKF und LDS des $\boldsymbol{x}(t)$ zugeordneten stationären stochastischen Prozesses.

Aufgabe 4.13: Die Eingangsspannung eines LC-Tiefpasses ist ein stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t) = \sin(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi})$, wobei ω_0 determiniert und $\boldsymbol{\varphi}$ eine im Intervall $[-\pi, \pi[$ gleichverteilte Zufallsvariable ist. Berechnen Sie Erwartungswert, AKF und LDS des stochastischen Prozesses am Ausgang des Tiefpasses.

Aufgabe 4.14: Die Spannung an einer RLC-Serienschaltung ist ein stationärer stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ mit Mittelwert $\mu_{\boldsymbol{x}} = 2$ und AKF $R_{\boldsymbol{x}}(\tau) = 4 + e^{-2|\tau|}$. Berechnen Sie Mittelwert $\mu_{\boldsymbol{y}}$ und Leistungsdichtespektrum $G_{\boldsymbol{y}}(\omega)$ für die am Kondensator abfallende Spannung $\boldsymbol{y}(t)$.

Aufgabe 4.15: Wie hängen (qualitativ) die effektive Bandbreite und die Korrelationszeit (effektive Breite der AKF) eines stationären stochastischen Prozesses zusammen? Geben Sie eine quantitative Analyse anhand eines idealisierten Spezialfalls.

Aufgabe 4.16: Für einen stationären, mittelwertfreien stochastischen Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ gelte $R_{\boldsymbol{x}}(\tau) = 0$ für $|\tau| > 3\,\mathrm{s}$. Sind die Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}(t_2)$ korreliert, wenn $|t_1 - t_2| = 5\,\mathrm{s}$?

Aufgabe 4.17: Gegeben sei das LDS $G_{\boldsymbol{x}}(\omega) = 1 + 18\pi\,\delta(\omega)$ von stationärem weißen Rauschen $\boldsymbol{x}(t)$. Berechnen Sie LDS, AKF und mittlere Leistung jenes stochastischen Prozesses $\boldsymbol{y}(t)$, welcher sich durch Filterung mit

a) einem idealen Tiefpass (Grenzfrequenz $1\,\mathrm{kHz}$),

b) einem idealen Bandpass (Mittenfrequenz $f_0 > 0.5\,\mathrm{kHz}$; einseitige Bandbreite $1\,\mathrm{kHz}$),

ergibt.

Aufgabe 4.18: In einem Amplitudenmodulationsverfahren wird das Sendesignal als stochastischer Prozess $\boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{x}(t) + a]\cos(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi})$ modelliert. Dabei ist das Nutzsignal $\boldsymbol{x}(t)$ tiefpass-begrenztes, mittelwertfreies weißes Rauschen mit LDS $\eta/2$ im Durchlassbereich $|\omega| \le \omega_g$ des Tiefpasses (ω_g ... Grenzfrequenz des Tiefpasses). Für die determinierte Modulationsfrequenz (Trägerfrequenz) ω_0 gilt $\omega_0 > \omega_g$. Der Parameter a ist determiniert. Schließlich ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine zufällige Phase, die gleichverteilt im Intervall $[-\pi, \pi[$ und statistisch unabhängig von $\boldsymbol{x}(t)$ ist. Berechnen Sie Mittelwert, AKF und LDS des Prozesses $\boldsymbol{y}(t)$. Fertigen Sie eine Skizze des LDS von $\boldsymbol{y}(t)$ an.

Aufgabe 4.19: Betrachten Sie ein Amplitudenmodulationsverfahren mit stochastischem Empfangssignal $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}(t)\cos(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{n}(t)$. Das Nutzsignal $\boldsymbol{a}(t)$ sei ein stationärer, mittelwertfreier Tiefpass-Prozess mit LDS $G_{\boldsymbol{a}}(\omega) = k\omega^2$ für $|\omega| < \omega_a < \omega_0$, wobei ω_0 die (determinierte) Trägerfrequenz ist. Die (von $\boldsymbol{a}(t)$ statistisch unabhängige) Störung $\boldsymbol{n}(t)$ ist stationäres, mittelwertfreies weißes Rauschen mit einem LDS von $\eta/2$. Die Phase $\boldsymbol{\varphi}$ ist gleichverteilt im Intervall $[-\pi, \pi[$ und statistisch unabhängig von $\boldsymbol{a}(t)$ und $\boldsymbol{n}(t)$. Im Empfänger werde der SP $\boldsymbol{x}(t)$ durch einen idealen Tiefpass mit der Grenzfrequenz ω_g gefiltert. Berechnen Sie das Verhältnis von mittlerer Signalleistung zu mittlerer Rauschleistung am Ausgang des Tiefpasses in Abhängigkeit von ω_g.

Aufgabe 4.20: Am Eingang eines linearen zeitinvarianten System mit Impulsantwort

$$h(t) = \begin{cases} A_0\, e^{-t}, & t \ge 0\,, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

liegt ein mittelwertfreier Gaußscher Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ mit Leistungsdichtespektrum $G_{\boldsymbol{x}}(\omega) = \frac{\eta}{2}$.

a) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $G_{\boldsymbol{y}}(\omega)$ des Ausgangsprozesses $\boldsymbol{y}(t) = (h * \boldsymbol{x})(t)$.

b) Berechnen Sie den quadratischen Mittelwert $E\left\{\boldsymbol{y}^2(t)\right\}$.

Lösung: a) $G_{\boldsymbol{y}}(\omega) = A_0^2\,\eta/(2 + 2\,\omega^2)$*; b)* $E\left\{\boldsymbol{y}^2(t)\right\} = A_0^2\,\eta/4$.

Aufgabe 4.21: Ein konstantes Signal $\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{A}$ mit den beiden Realisierungen $A = 1$ und $A = -1$ wird über einen Kanal mit additivem, weißen, Gaußschen Rauschen $\boldsymbol{n}(t)$ (Leistungsdichtespektrum $G_{\boldsymbol{n}}(\omega) = \eta/2$) übertragen. Für den Empfänger, welcher das Signal $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$ beobachtet, werden zwei Strukturen in Betracht gezogen:

1.) Bei der ersten Struktur wird das Empfangssignal $\boldsymbol{r}(t)$ mit einem idealen Tiefpass $h_1(t)$ (einseitige Bandbreite B) gefiltert und dann mit Periode ΔT abgetastet. Als Schätzwert für $\mathbf{A}$ wird das arithmetische Mittel von

N aufeinanderfolgenden Abtastwerten verwendet,

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{r} * h_1)(k\Delta T) = \mathbf{A} + \tilde{\boldsymbol{n}}_1\,,$$

wobei $\tilde{\boldsymbol{n}}_1 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{n} * h_1)(k\Delta T)$.

2.) Bei der zweiten Struktur wird das Empfangssignal $\boldsymbol{r}(t)$ über eine Zeitdauer T gemittelt,

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{r}(t)\,dt = \mathbf{A} + \tilde{\boldsymbol{n}}_2\,,$$

mit $\tilde{\boldsymbol{n}}_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{n}(t)\,dt$. Dies lässt sich so auffassen, dass als Empfangsfilter ein Integrator mit Impulsantwort $h_2(t) = 1/T$ für $0 \le t \le T$ verwendet wird, dessen Ausgangssignal zum Zeitpunkt T abgetastet wird.

Das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) für den Schätzwert $\hat{\mathbf{A}}_i$ ist $(S/N)_i = \rho^2_{\mathbf{A}}/\rho^2_{\tilde{\boldsymbol{n}}_i}$.

a) Bestimmen Sie für die erste Empfängerstruktur die kleinstmögliche Abtastperiode ΔT, sodass die Abtastwerte des gefilterten Rauschens $(\boldsymbol{n} * h_1)(k\Delta T)$ paarweise unkorreliert sind.

b) Berechnen Sie das SNR $(S/N)_1$ des ersten Empfängers mit ΔT aus Punkt a).

c) Berechnen Sie das SNR $(S/N)_2$ des zweiten Empfängers. Welcher der beiden Empfänger liefert bei gleicher Beobachtungsdauer das bessere SNR?

Lösung: a) $\Delta T = 1/(2B)$*; b)* $(S/N)_1 = \frac{N}{\eta B}$*; c)* $(S/N)_2 = \frac{2T}{\eta}$, $N\Delta T = T \rightarrow (S/N)_1 = (S/N)_2$.

Aufgabe 4.22: Ein stationärer mittelwertfreier Tiefpass-Prozess $\boldsymbol{a}(t)$ mit Leistungsdichtespektrum

$$G_{\boldsymbol{a}}(\omega) = \begin{cases} k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right), & |\omega| \le \omega_a \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wird für die Übertragung zur Frequenz $\omega_0 > \omega_a$ moduliert. Das resultierende Sendesignal ist $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{a}(t)\cos(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi})$, wobei die Phase $\boldsymbol{\varphi}$ eine in $[-\pi, \pi[$ gleichverteilte und von allen anderen Größen statistisch unabhängige Zufallsvariable ist. Am Kanal wird das Sendesignal durch stationäres, mittelwertfreies, weißes und von allen anderen Größen statistisch unabhängiges Rauschen mit LDS $G_{\boldsymbol{n}}(\omega) = \eta/2$ gestört. Der Prozess SP $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$ wird am Empfängereingang mit einem idealen Tiefpass $g(t)$ (Grenzfrequenz ω_g) gefiltert, sodass $\boldsymbol{y}(t) = \tilde{\boldsymbol{s}}(t) + \tilde{\boldsymbol{n}}(t)$ mit $\tilde{\boldsymbol{s}}(t) = (\boldsymbol{s} * g)(t)$ und $\tilde{\boldsymbol{n}}(t) = (\boldsymbol{n} * g)(t)$.

a) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $G_{\boldsymbol{s}}(\omega)$ von $\boldsymbol{s}(t)$.

b) Berechnen Sie das Signal-Rausch-Verhältnis $S/N = \rho^2_{\tilde{\boldsymbol{s}}}/\rho^2_{\tilde{\boldsymbol{n}}}$ am Ausgang des Tiefpasses.

Lösung: a) $G_{\boldsymbol{s}}(\omega) = [G_{\boldsymbol{a}}(\omega - \omega_0) + G_{\boldsymbol{a}}(\omega + \omega_0)]/4$*; b)* $S/N = \begin{cases} 0, & \omega_g \le \omega_0 - \omega_a \\ \frac{k}{4\eta\omega_g}\left[\omega_g - \omega_0 - \frac{(\omega_g - \omega_0)^3}{3\omega_a^2} + \frac{2\omega_a}{3}\right], & |\omega_g - \omega_0| \le \omega_a\,. \\ \frac{2k\omega_a}{3\eta\omega_g}, & \omega_0 + \omega_a < \omega_g \end{cases}$

Aufgabe 4.23: Am Eingang eines linearen, zeitinvarianten Filters mit Impulsantwort $h(t) = a\,\delta(t) + b\,\delta(t - T)$ liegt ein stationärer stochastischer Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ mit AKF

$$R_{\boldsymbol{x}}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{4T}\,, & \text{für } |\tau| < 4T\,, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Der Ausgangsprozess $\boldsymbol{y}(t)$ soll bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers einen optimalen Schätzwert für $\boldsymbol{x}(t+T)$ darstellen. Berechnen Sie dazu die optimalen Filterkoeffizienten $(a, b)_{\text{opt}} = \arg\min_{a,b} E\left\{[\boldsymbol{x}(t+T) - \boldsymbol{y}(t)]^2\right\}$.

b) Zeigen Sie, dass der Schätzfehler $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t+T) - \boldsymbol{y}(t)$ mit a_{opt}, b_{opt} gemäß Punkt a) orthogonal zu $\boldsymbol{x}(t)$ ist.

Lösung: a) $a_{opt} = 6/7$, $b_{opt} = -1/7$.

Aufgabe 4.24: Leiten Sie Ausdrücke für die KKF bzw. das Kreuz-LDS der stationären stochastischen Prozesse am Eingang und Ausgang eines LTI-Systems her.

Aufgabe 4.25: Leiten Sie eine Beziehung zwischen KKF/Kreuz-LDS der stochastischen Prozesse am Eingang zweier LTI-Systeme und KKF/Kreuz-LDS am Ausgang dieser LTI-Systeme her.

Aufgabe 4.26: Zeigen Sie, dass spektral disjunkte stochastische Prozesse orthogonal sind.

Aufgabe 4.27: Zeigen Sie, da

a) ein schwach stationärer Gauß-verteilter stochastischer Prozess streng stationär ist,

b) ein schwach weißer Gauß-verteilter stochastischer Prozess streng weiß ist.

Aufgabe 4.28: Wie ändert sich die WDF N-ter Ordnung eines stationären Gauß-verteilten stochastischen Prozesses beim Durchgang durch ein LTI-System?

Aufgabe 4.29: Gegeben sei ein stationärer Gauß-verteilter Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ mit Mittelwert $\mu_{\boldsymbol{x}} = 0.5$ und AKF

$$R_{\boldsymbol{x}}(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T & |\tau| < T\,, \\ 0\,, & |\tau| \geq T\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die WDF 1. und 2. Ordnung von $\boldsymbol{x}(t)$.

b) Durch Abtastung werden die beiden Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(t_2)$ gebildet. Berechnen Sie die Mittelwerte $\mu_{\boldsymbol{x}_1}$ und $\mu_{\boldsymbol{x}_2}$ sowie die Korrelation $R_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}$ für $t_2 - t_1 = T/2$ bzw. $t_2 - t_1 = T$.

Aufgabe 4.30: Berechnen Sie das LDS eines PAM-Prozesses mit stationärer weißer Datenfolge $\boldsymbol{c}_n \in \{-1, 0, 1\}$ (gleichwahrscheinlich) und Sendeimpuls

$$p(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| < T\,, \\ 0, & |t| \geq T\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4.31: Wie kann man im Fall einer stationären Markoff-Kette den Wahrscheinlichkeitsvektor aus der Übergangsmatrix berechnen? Führen Sie diese Berechnung für eine Markoff-Kette mit zwei Zuständen durch.

Aufgabe 4.32: Diskutieren Sie eine stationäre Markoff-Kette mit zwei Zuständen und Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$, $\pi_{12} = \pi_{21} = 0$. Welche Realisierungen gibt es? Ist die Kette determiniert und/oder zerfallend und/oder gleichverteilt und/oder weiß? Begründen Sie Ihre Antworten. Versuchen Sie, den Wahrscheinlichkeitsvektor zu berechnen. Ist Ihnen die Übergangsmatrix von früher bekannt? Welche Eigenwerte hat die Übergangsmatrix? Welche Eigenvektoren gibt es? Welche Probleme treten bei der Berechnung der Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix im Fall eines mehrfachen Eigenwerts auf?

Aufgabe 4.33: Die Übergangswahrscheinlichkeiten einer stationären Markoff-Kette mit zwei Zuständen a_1 und a_2 sind $P[\boldsymbol{x}_{n+1} = a_1 | \boldsymbol{x}_n = a_1] = 1/3$ und $P[\boldsymbol{x}_{n+1} = a_2 | \boldsymbol{x}_n = a_2] = 1/9$.

a) Geben Sie die Übergangsmatrix an und zeichnen Sie das Markoff-Diagramm.

b) Berechnen Sie die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten.

Lösung: a) $\underline{\Pi}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 8/9 \\ 2/3 & 1/9 \end{pmatrix}$; *b)* $p_1 = 4/7$; $p_2 = 3/7$.

Aufgabe 4.34: Zeigen Sie, dass der zeitlich konstante stochastische Prozess $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}$ nicht ergodisch ist.

Aufgabe 4.35: Berechnen Sie die empirische WDF 1. Ordnung des Rechtecksignals $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \, r(t - kT/2)$ (mit $r(t) = 1$ für $0 \leq t \leq T/2$ und $r(t) = 0$ sonst) und des Dreiecksignals $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \, d(t - kT/2)$ (mit

$d(t) = 1 - |4t - T|/T$ für $0 \leq t \leq T/2$ und $d(t) = 0$ sonst). Beachten Sie dabei, dass für ein T-periodisches Signal $p_{x,\infty}^{(1)}(\xi) = p_{x,T}^{(1)}(\xi)$ gilt.

Aufgabe 4.36: Vergleichen Sie empirischen Mittelwert, empirische AKF und empirische WDF 1. Ordnung des Signals $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ mit Mittelwert, AKF und WDF 1. Ordnung des SP $\boldsymbol{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \boldsymbol{\varphi})$ ($\boldsymbol{\varphi}$ gleichverteilt zwischen 0 und 2π). Ist der stochastische Prozess $\boldsymbol{x}(t)$ schwach ergodisch?