

ZUNAME:
 VORNAME:
 MAT. NR.:

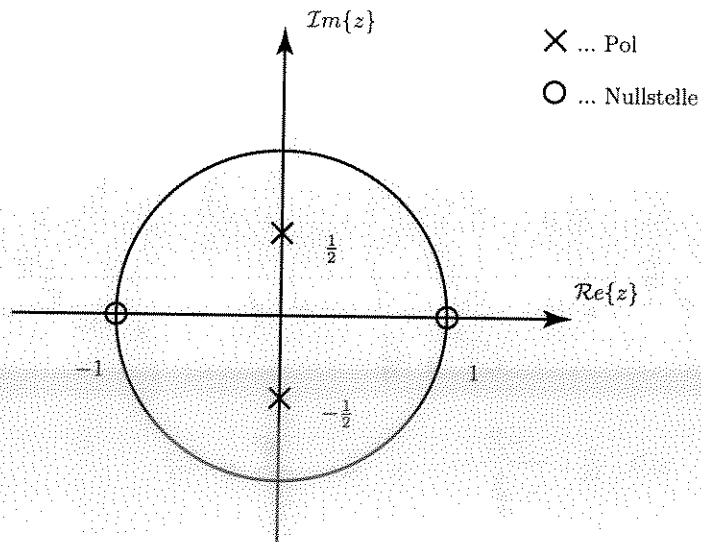
2. SuS2-Teilprüfung A
 Institut für Nachrichtentechnik
 und Hochfrequenztechnik
 G. Doblinger, J. Gonter, C. Novak
 TU-Wien 16.6.2010

- Bitte beachten Sie:**
- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
 - Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
 - Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
 - **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!
 - Die Antworten auf Teilaufgaben, deren jeweils richtige Antwort aus einer Auswahl von Lösungen gefunden werden muss, **müssen plausibilisiert werden!**

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	35	25	20	20	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.



- (a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_1, a_2, b_1,$ und b_2 der allgemeinen Übertragungsfunktion

$$H(z) = k \cdot \frac{z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

passend zum Pol/Nullstellendiagramm.

$$H(z) = k \cdot \frac{(z+1)(z-1)}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} = k \cdot \frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{4}}$$

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$b_2 = -1$$

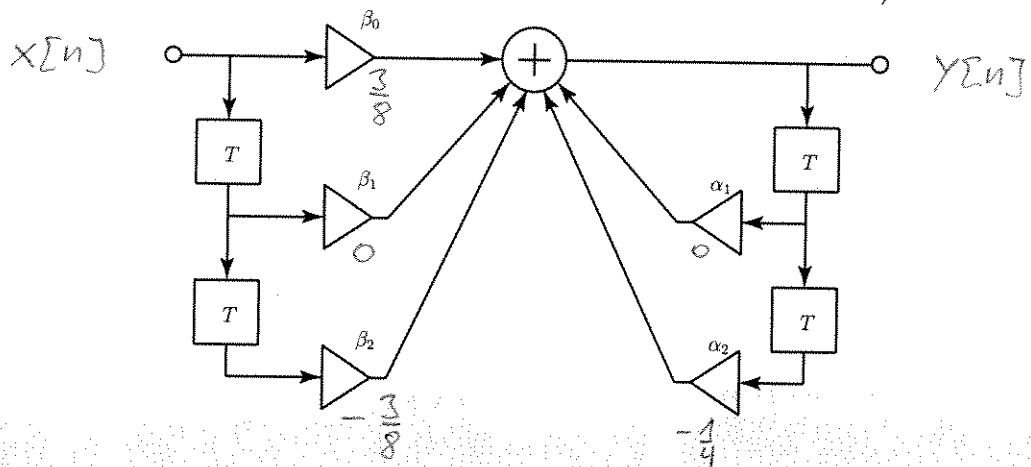
- (b) (5 Punkte) Bestimmen Sie k so, dass $H(z)|_{z=e^{j\pi/2}} = 1$ ist.

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = k \cdot \frac{e^{j\pi} - 1}{e^{j\pi} + \frac{1}{4}} \stackrel{!}{=} 1, \quad e^{j\pi} = -1$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{-2}{-\frac{3}{4}} = k \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$k = \frac{3}{8}$$

- (c) (10 Punkte) Bestimmen Sie die fehlenden Filterkoeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ im folgenden Schaltbild, sodass damit die in Punkt (a) gegebene Übertragungsfunktion realisiert wird (Verwenden Sie den Faktor k aus Punkt b).



$$H(z) = \frac{3}{8} \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \frac{1 - z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow 3X(1 - z^{-2}) = 8Y(1 + \frac{1}{4}z^{-2})$$

$$3x[n] - 3x[n-2] = 8y[n] + 2y[n-2]$$

$$y[n] = \frac{3}{8}x[n] - \frac{3}{8}x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

$\beta_0 = \frac{3}{8}$	$\alpha_1 = 0$
$\beta_1 = 0$	$\alpha_2 = -\frac{1}{4}$
$\beta_2 = -\frac{3}{8}$	

(d) (10 Punkte) Finden Sie nun die Impulsantwort $h[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.

- A. $\frac{3}{8}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sigma[n]$ B. $\frac{3}{8}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\sigma[n-2]$
 C. $\frac{1}{4}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)$ D. keine dieser Lösungen

$$H(z) = \frac{3}{8} \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \frac{z^2 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{z^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \left[1 - \frac{5}{4} \frac{1}{z^2 + \frac{1}{4}} \right]$$

aus Formelsammlung: $\rho^n \cos(\alpha n) \sigma[n] = \frac{z(z - \rho \cos \alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2}$

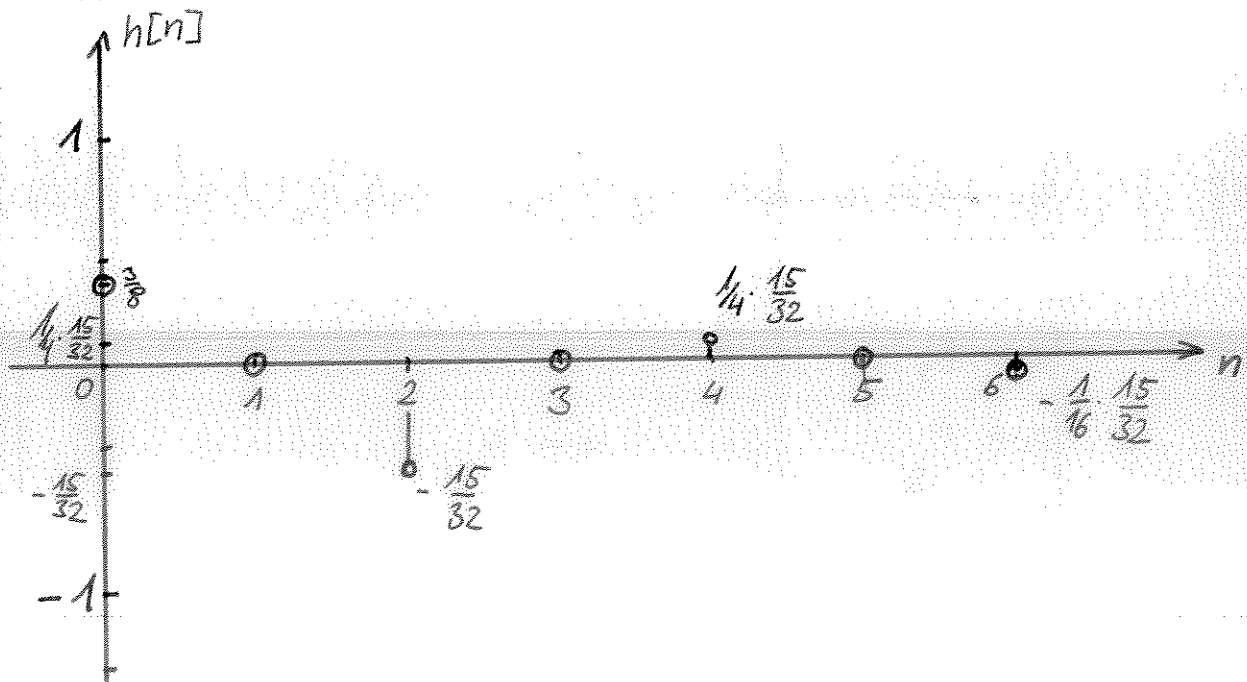
mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\tilde{h}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{\pi}{2} n = \frac{z^2}{z^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{3}{8} \cdot \delta[n] - \frac{15}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right) \cdot \sigma[n-2]$$

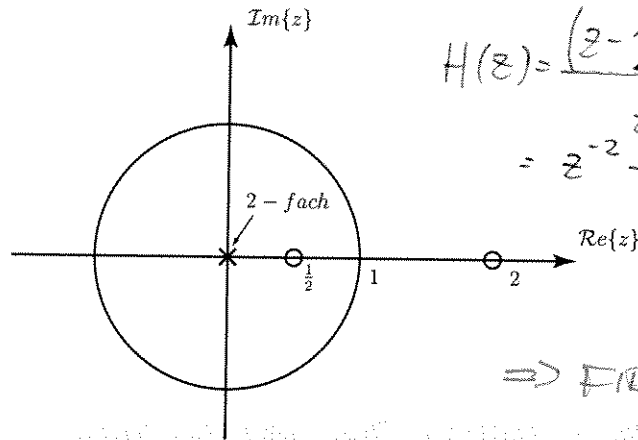
(d) B

(e) (5 Punkte) Skizzieren Sie $h[n]$



Aufgabe 2: (25 Punkte)

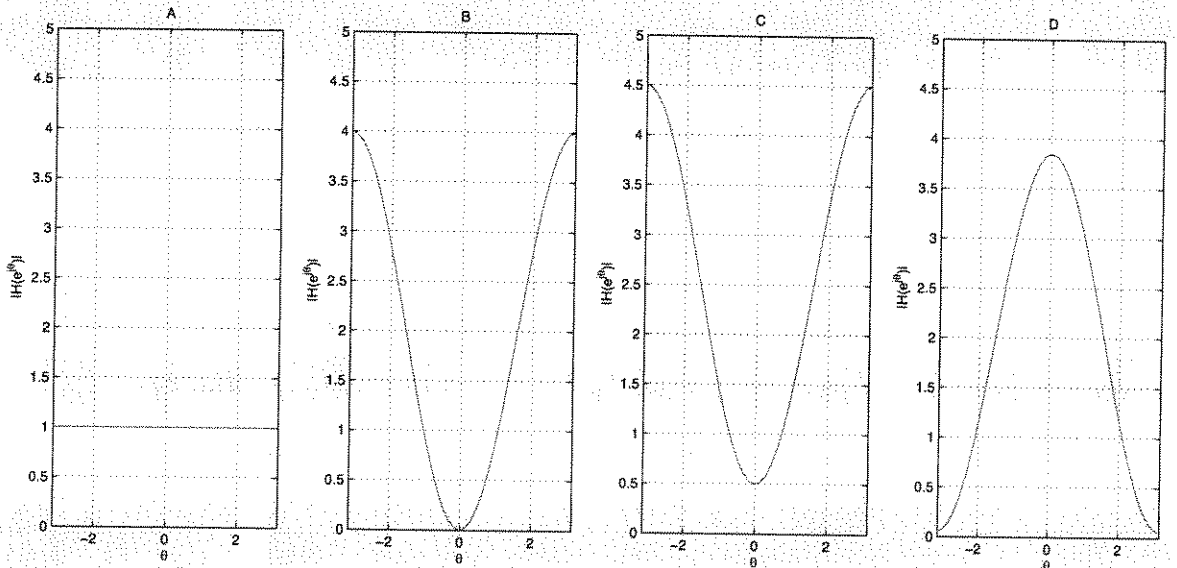
Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.



$$H(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}{z^2} = z^{-2} - \frac{5}{2}z^{-1} + 1$$

\Rightarrow FIR-Filter!

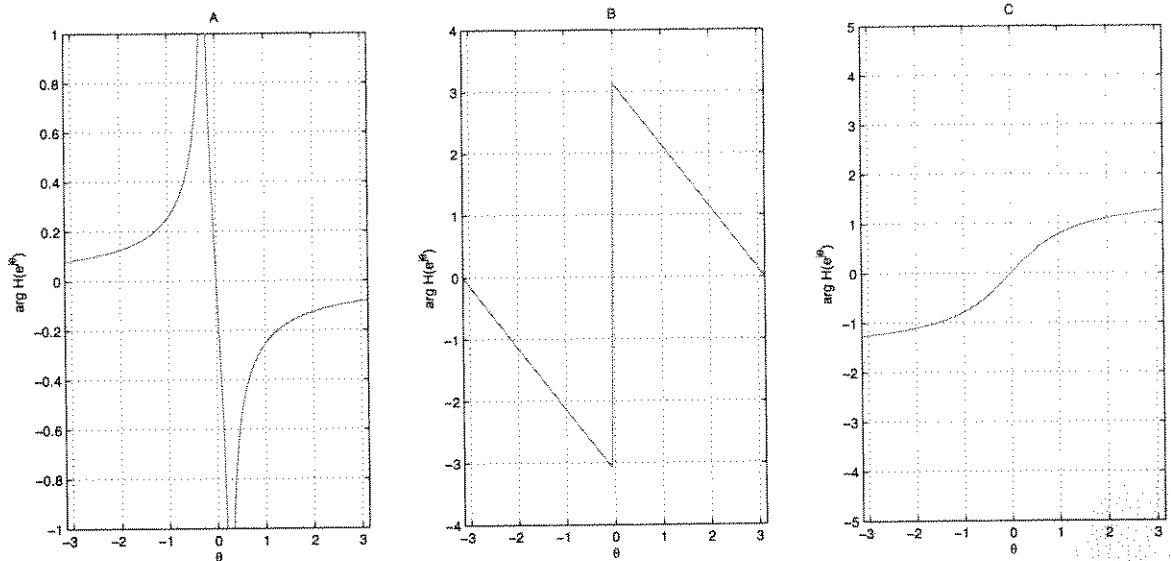
(a) (6 Punkte) Der Betragsverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist, für $\theta \in [-\pi, \pi]$:



Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (E: keine der Lösungen.)

(a) C

(b) (6 Punkte) Der Phasenverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist:



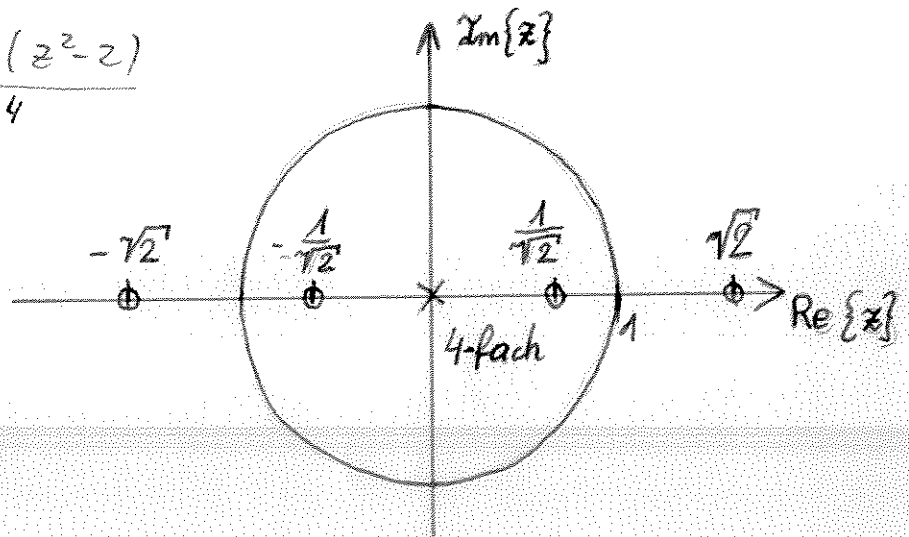
Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (D: keine der Lösungen.)

FIR-Filter: Lineare Phase

(b) B

(c) (8 Punkte) Nun wird eine Frequenztransformation gemäss der Substitution $z \rightarrow z^2$ vorgenommen. Die dabei entstehende Übertragungsfunktion wird mit $\tilde{H}(z)$ bezeichnet. Zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $\tilde{H}(z)$.

$$\tilde{H}(z) = \frac{(z^2 - \frac{1}{2})(z^2 - z)}{z^4}$$



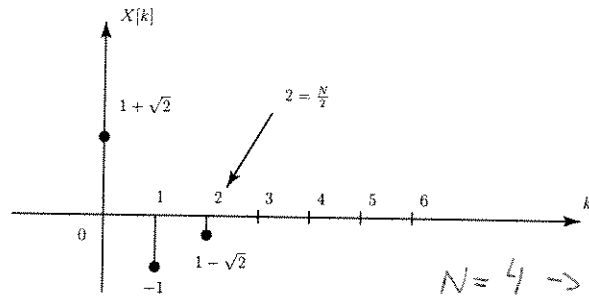
(d) (5 Punkte) Bei dem System $\tilde{H}(z)$ handelt es sich um eine(n)

A. Tiefpass B. Hochpass C. Bandpass D. Bandsperre

(d) C

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Von einem *reellen* N -Punkte Signal $x[n]$ ist die DFT $X[k]$ für $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$ gegeben:



$N=4 \rightarrow$ es fehlt nur $X[3]$

(a) (7 Punkte) Ergänzen Sie $X[k]$ für $k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$

$x[n], X[k]$ reell: $X^*[k] = X[k] = X[N-k]$

$$X[3] = X[4-3] = X[1] = -1$$

\swarrow \downarrow
 N k

(a) -1

(b) (13 Punkte) Finden Sie $x[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.

- A. $\frac{1}{4} \cdot [(1 + \sqrt{2}) + (-1)^n \cdot (1 - \sqrt{2})]$ B. $\frac{(-1)^n}{4} \cdot [(1 + \sqrt{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}n)]$
 C. $\frac{1}{4} \cdot [2(-1)^n \cdot (1 + \sqrt{2}) + \cos(\frac{\pi}{4}n)]$ D. $\frac{1}{4} \cdot [1 + \sqrt{2} + (-1)^n \cdot (1 - \sqrt{2}) - 2 \cos(\frac{\pi}{2}n)]$
 E. keine dieser Lösungen

$$X[k] = (1 + \sqrt{2})\delta[k] - \delta[k-1] + (1 - \sqrt{2})\delta[k-2] - \delta[k-3]$$

$$= \frac{1}{N} \left[(1 + \sqrt{2})N\delta[k] - N\delta[k-1] + (1 - \sqrt{2})N\delta[k-2] - N\delta[k-3] \right]$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \left[(1 + \sqrt{2}) - e^{j\frac{2\pi}{N}n} + (1 - \sqrt{2})e^{j\frac{4\pi}{N}n} - e^{j\frac{2\pi \cdot 3}{N}n} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \underline{N=4}: & \frac{1}{4} \left((1+\sqrt{2})e^{j\frac{\pi}{2}n} + (1-\sqrt{2})e^{j\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left((1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})e^{j\pi n} - e^{j\pi n} \cdot \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left((1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})(-1)^n - (-1)^n \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left((1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})(-1)^n - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \right)
 \end{aligned}$$

hat keine Auswirkung

(b) D

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Gegeben ist ein System von Differenzgleichungen,

$$\text{I: } y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = w[n] - \frac{1}{4}x[n]$$

$$\text{II: } y[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1].$$

Nehmen Sie im Weiteren **verschwindende Anfangsbedingungen** an.

(a) (13 Punkte) Bestimmen Sie eine Differenzgleichung für $y[n]$ und $x[n]$, in der das Zwischensignal $w[n]$ nicht vorkommt. Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.

- A. $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{3}{8}x[n-1]$
- B. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{3}{8}x[n+1]$
- C. $y[n] + \frac{1}{2}y[n+1] + \frac{1}{4}y[n+2] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{3}{8}x[n+1]$
- D. $2y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{3}{8}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$
- E. keine dieser Lösungen

aus I: $w[n] = y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}x[n]$

$$W = Y \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) + \frac{1}{4}X$$

$$\text{II: } Y + \frac{1}{2}z^{-1}W = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Xz^{-1}$$

I in II:

$$Y + \frac{1}{2}Y(z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) + \frac{1}{8}Xz^{-1} = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Xz^{-1}$$

$$\circ \quad Y[n] + \frac{1}{2}Y[n-1] + \frac{1}{4}Y[n-2] = \frac{1}{2}X[n] + \frac{3}{8}X[n-1]$$

(a) A

(b) (7 Punkte) Berechnen Sie die Nullstellen und Pole des Systems.

$$Y \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \right) = X \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} \right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{2}z \frac{z + \frac{3}{4}}{z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}$$

$$z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Nullstellen: $0, -\frac{3}{4}$

Pole: $-\frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{3}}{4}$

Raum für Nebenrechnungen