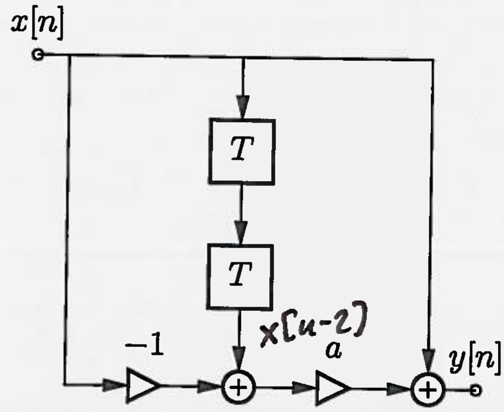
**Aufgabe 1: (24 Punkte)**

Gegeben ist das abgebildete Schaltbild eines digitalen Filters:




(a) (8 Punkte) Bestimmen Sie für verschwindende Anfangsbedingungen und für allgemeine (reelle) Werte von $a$

1. eine Differenzengleichung des Systems
2. die Impulsantwort $h[n]$ des Systems
3. die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems
4. das Pol/Nullstellendiagramm für $a = \frac{1}{2}$ und für $a = 1$

(b) (8 Punkte) Prüfen Sie (mit Begründung!) folgende Systemeigenschaften:

1. Kausalität (für welche Werte $a$?)
2. Stabilität (für welche Werte $a$?)
3. das System ist rekursiv oder nichtrekursiv (für welche Werte $a$?)
4. das System ist für $a = \frac{1}{2}$ ein Tiefpass oder ein Hochpass oder ein Bandpass oder eine Bandsperre

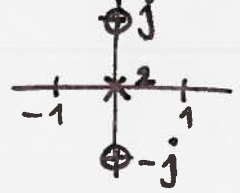
(c) (8 Punkte) Für welche Werte von $a$ hat das digitale Filter einen linearen Phasengang von $H(e^{j\theta})$? (mit Begründung!)

a) 1.) $y[n] = x[n] - ax[n] + a\,x[n-2] = (1-a)x[n] + a\delta[n-2]$

2.) $h[n] = (1-a)\,\delta[n] + a\,\delta[n-2]$

3.) $H(z) = (1-a) + a\,z^{-2} = \frac{1}{z^2}\left((1-a)z^2 + a\right)$

4.) $a = 1/2$:




$a = 1$


b.) 1.) 2.) 3.) Kausal + stabil + nichtrekursiv $\forall a \in \mathbb{R}$

4.) Bandsperre

c.) $a \in \{0, 1/2, 1\}$

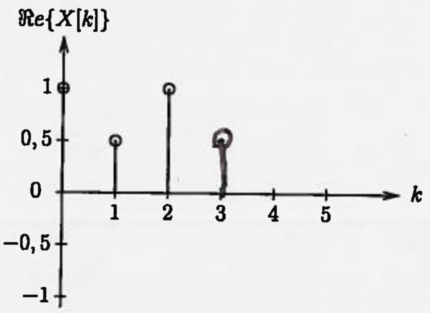


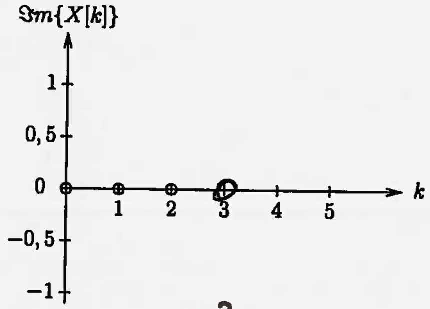
nur für diese Werte liegen alle NST spiegelbildlich zum Einheitskreis! ⇒ ~~Einsetzen und vergleichen~~

$\underline{a = 0}$: $\arg H(e^{j\theta}) = 0$ $a = 1$ $\arg H(e^{j\theta}) = -2\theta$ $\underline{a = 1}$: $H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta} A(\theta) \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 2: (24 Punkte)**

Gegeben sind die in der Abbildung angegebenen Werte der diskreten Fouriertransformation $X[k]$ eines **reellwertigen** $N = 4$ Punkte Signals $x[n]$:




(a) (8 Punkte) Ergänzen Sie $X[k]$ für $k = \frac{N}{2} + 1, \ldots, \underbrace{N-1}_{=3}$.

(b) (8 Punkte) Berechnen Sie $x[n]$ für $n = 0, 1, \ldots, N-1$ in der Form

$$x[n] = a + b\,(-1)^n + c\,\cos(\theta_0 n + \varphi_0)$$

und bestimmen Sie $a$, $b$, $c$, $\theta_0$ und $\varphi_0$.

(c) (8 Punkte) Berechnen Sie die Signalenergie von $x[n]$.

2a) $X[3] = 0{,}5$

2b) $$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{3} X[k] \exp\left(j \frac{2\pi}{4} n k\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( 1 + 0{,}5 \exp\left(j \frac{2\pi}{4} n\right) + 1 \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{4} 2 n\right) + 0{,}5 \underbrace{\exp\left(j \frac{2\pi}{4} 3 n\right)}_{= \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} n\right)} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right) + 1 \cdot (-1)^n \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (-1)^n + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right)$$

$$\Rightarrow a = b = c = 1/4 \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{4} \quad \varphi_0 = \emptyset.$$

2c) $$\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^2[k] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 1 + 0{,}25 + 1 + 0{,}25 \right] = \frac{2{,}5}{4} = \frac{5}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

**Aufgabe 3: (26 Punkte)**

Bestimmen Sie die richtige(n) Aussage(n) bzw. die richtige(n) Antwort(en) und kreuzen Sie diese an.

(a) (8 Punkte) Die bilineare Z-Transformation

A. verändert die Lage der Grenzfrequenzen bei der Transformation eines analogen Filters. ☒

B. verändert den Phasenverlauf des Frequenzgangs bei der Transformation eines analogen Filters. ☒

C. verändert das Stabilitätsverhalten bei der Transformation eines analogen Filters. ○

D. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

(b) (8 Punkte) Beim Pol/Nullstellendiagramm der Übertragungsfunktion eines **kausalen**, digitalen Filters mit reellwertigen, konstanten Filterkoeffizienten

A. liegen immer alle Pole innerhalb des Einheitskreises (in der komplexen z-Ebene). ○

B. können alle Pole in $z = \infty$ liegen. ○

C. können alle Pole in $z = 0$ liegen. ☒

D. müssen genau so viele Pole wie Nullstellen vorhanden sein. ○

E. können konjugiert komplexe Pole und Nullstellen vorhanden sein. ☒

F. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

(c) (10 Punkte) Die inverse Z-Transformation von $X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{z}{z+3}$ ergibt ein:

A. stabiles zweiseitiges Signal. ☒

B. stabiles linksseitiges Signal. ○

C. stabiles rechtsseitiges Signal. ○

D. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

**Aufgabe 4: (26 Punkte)**

Bestimmen Sie die richtige(n) Aussage(n) bzw. die richtige(n) Antwort(en) und kreuzen Sie diese an.

(a) (10 Punkte) Ein digitales Filter habe eine Impulsantwort der Länge $N_h = 100$. Mit Hilfe der zyklischen Faltung soll das Ausgangssignal auf ein Eingangssignal der Länge $N_x = 150$ berechnet werden. Dazu sollte

A. eine DFT-Länge $N = 150$ verwendet werden und die Impulsantwort mit Nullen auf die Länge $N_h' = 150$ erweitert werden. ○

B. eine DFT-Länge $N = 256$ verwendet werden und die Impulsantwort und das Eingangssignal mit Nullen auf die Länge $N_h' = 256$ erweitert werden. ⊗

C. eine DFT-Länge $N = 200$ verwendet werden und die Impulsantwort und das Eingangssignal mit Nullen auf die Länge $N_h' = 200$ erweitert werden. ○

D. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

(b) (6 Punkte) Der Fenstereffekt der DFT

A. entsteht durch Multiplikation der DFT des Signals mit der DFT der Fensterfunktion. ○

B. entsteht durch Faltung der DFT des Signals mit der DFT der Fensterfunktion. ⊗

C. entsteht durch zeitliche Begrenzung des Signals. ⊗

D. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

(c) (10 Punkte) Welche der folgenden $N = 8$ Punkte Signale haben reellwertige DFTs der Länge $N = 8$?

A. $x[n] = (-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1)$ ○

B. $x[n] = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$ ⊗

C. $x[n] = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$ ○

D. Keine der anderen Antworten ist richtig. ○

Hinweis: Diese Signaldarstellung gibt die Werte bei den Indizes $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ an. So steht z.B. $x[n] = (-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1)$ für $x[n] = -\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-6] - \delta[n-7]$.