ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

2. SuS2-Teilprüfung **A** / B

Institute of Telecommunications
G. Doblinger, J. Gonter
TU-Wien 21.6.2011

> **Bitte beachten Sie:**
>
> - An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
> - Die Beispiele ausschliesslich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
> - Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
> - **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!
> - Bei **Multiple-Choice-Fragen** reduziert sich für jede falsche Antwort die erreichbare Punktezahl für das gesamte Beispiel - maximal jedoch um 3 Punkte pro falscher Antwort.

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	27	25	23	25	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (27 Punkte)

Gegeben ist die $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z) = A(z^2) \overset{+}{-} z^{-1}B(z^2)$ eines kausalen Signals $x[n]$, wobei der Einheitskreis im Konvergenzgebiet von $X(z)$ liegt. $A(z^2)$, $B(z^2)$ sind unbekannte rationale Funktionen in z^2.

Für die $\mathcal{Z}$-Transformation $Y(z) = A(z^2) \underline{+} z^{-1}B(z^2)$ sollen Sie folgende Fragen beantworten:

(a) (5 Punkte) Welcher einfache Zusammenhang der Form $Y(z) = X(f(z))$ besteht zwischen $X(z)$ und $Y(z)$?

$Y(z) = X(-z)$

$\Rightarrow$ TP-HP / HP-TP – Transformation

$f(z) =$ $-z$

(b) (5 Punkte) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $x[n]$ und $y[n]$? ($y[n]$ ist die inverse $\mathcal{Z}$-Transformation von $Y(z)$.) *Hinweis: Benutzen Sie dazu die Formelsammlung!*

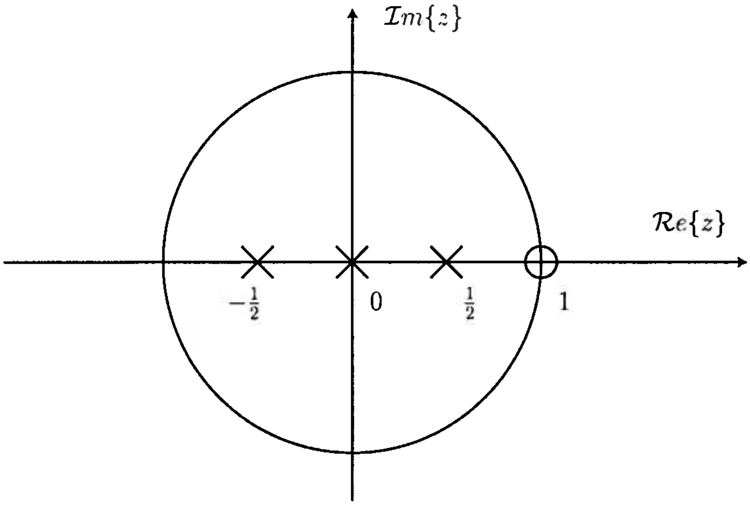
Formelsammlung: $z_0^n x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$y[n] = (-1)^n x[n]$

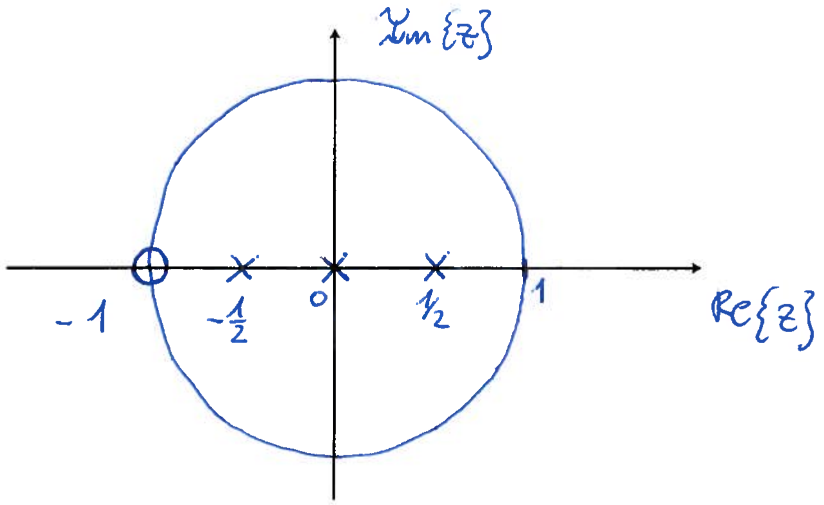
(c) (1 Punkte) Ist $y[n]$ kausal? Ja: ☒ Nein: ◯

(d) (1 Punkte) Ist $y[n]$ stabil, wenn $x[n]$ stabil ist? Ja: ☒ Nein: ◯

(e) (7 Punkte) $X(z)$ habe das folgende Pol- / Nullstellendiagramm:



Skizzieren Sie das Pol- / Nullstellendiagramm von $Y(z)$!



(f) (8 Punkte) Bestimmen Sie $A(z^2)$, $B(z^2)$ für das gegebene Pol- / Nullstellendiagramm.

$$X(z) = \frac{z-1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{z-1}{z\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{z^2-\frac{1}{4}} - z^{-1}\frac{1}{z^2-\frac{1}{4}}$$

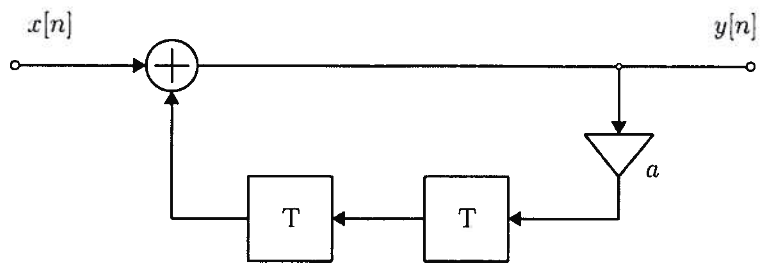
$$\Rightarrow \quad A(z^2) = \frac{1}{z^2-\frac{1}{4}}$$

$$B(z^2) = -A(z^2) = \frac{-1}{z^2-\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Von einem rekursiven Digitalfilter ist das Schaltbild gegeben ($a = \frac{1}{4}$):

B: $a = \frac{1}{9}$



(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des digitalen Filters.

$$y[n] = a\,y[n-2] + x[n]$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des digitalen Filters.

$$Y(z) = a z^{-2} Y(z) + X(z) \Rightarrow Y(z)\left(1 - a z^{-2}\right) = X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a} = 1 + \frac{a}{z^2 - a}$$

(c) (7 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h[n]$ des digitalen Filters.

Partialbruchzerlegung von $\left.\frac{a}{z^2 - a}\right|_{a=\frac{1}{4}} : \frac{-\frac{1}{4}}{z + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}}$

$$H(z) = 1 - \frac{1/4}{z + \frac{1}{2}} + \frac{1/4}{z - \frac{1}{2}}$$

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \sigma[n]$$

B: $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \sigma[n]$

Ad Aufgabe 2c: Alternative Lösungswege

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - a} \xleftrightarrow{\text{vgl.}} \frac{z(z - \varrho \cdot \cos\alpha)}{z^2 - 2\varrho z \cdot \cos\alpha + \varrho^2} \circ\!\!-\!\!\circ \varrho^n \cos\alpha n\, \sigma[n]$$

mit $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\varrho^2 = -a \Rightarrow \varrho = j\sqrt{a}$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{z^2 - a} \circ\!\!-\!\!\circ (j\sqrt{a})^n \cdot \cos\frac{\pi}{2} n \cdot \sigma[n]$$

$$= j^n (\sqrt{a})^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sigma[n]$$

$$= j^n (\sqrt{a})^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \cdot j^n \cdot \sigma[n]$$

$$= (\sqrt{a})^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \cdot (-1)^n \cdot \sigma[n]$$

$$= (\sqrt{a})^n \cdot \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \cdot \sigma[n]$$

Gruppe A: $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$ Gruppe B: $\sqrt{a} = \frac{1}{3}$

Ad Aufgabe 2c: Alternative Lösungswege II

graphisch: $x[n] = \delta[n]$

B:

$\Rightarrow \quad y[0] = 1 = (\sqrt{a})^n$ 1

$y[1] = 0$ 0

$y[2] = 1/4 = (\sqrt{a})^n$ $1/9$

$y[3] = 0$ 0

$y[4] = 1/16 = (\sqrt{a})^n$ $1/81$

$\vdots$

$$y[n] = \underbrace{(\sqrt{a})^n}_{\text{für } n \text{ gerade}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)}_{=0 \text{ für } n \text{ ungerade}} \underbrace{\sigma[n]}_{\text{kausal}}$$

Ad Aufgabe 2c : Alternative Lösungswege III

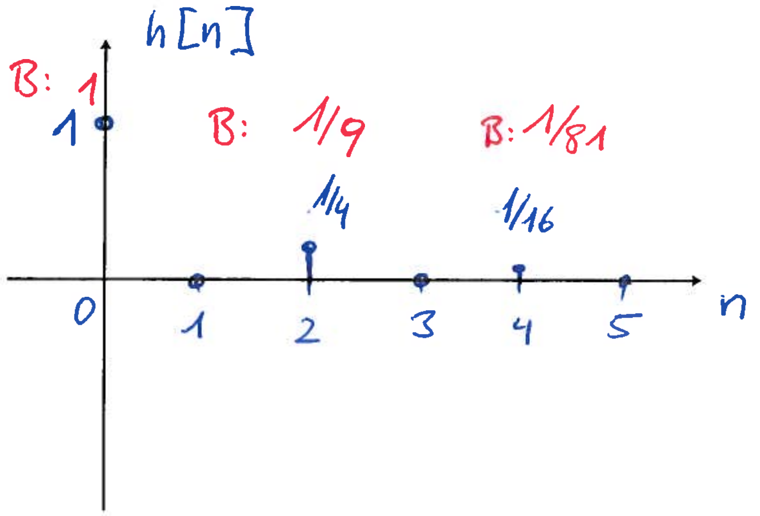
Durch Partialbruchzerlegung von $\dfrac{z^2}{z^2-a}$

ergibt sich ohne vorhergehende Polynomsdivision

$$\frac{z^2}{z^2-a} = \frac{1}{2}\,\frac{z}{z+\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-\sqrt{a}}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \; h[n] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\sigma[n] \qquad \left(\text{für } a = \frac{1}{4}\right)$$

oder allg.: $\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{a}\right)^n + \left(-\sqrt{a}\right)^n\right]\sigma[n]$



(d) (7 Punkte) Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ auf den Systemeingang $x[n] = (-1)^n, \quad \forall n$.

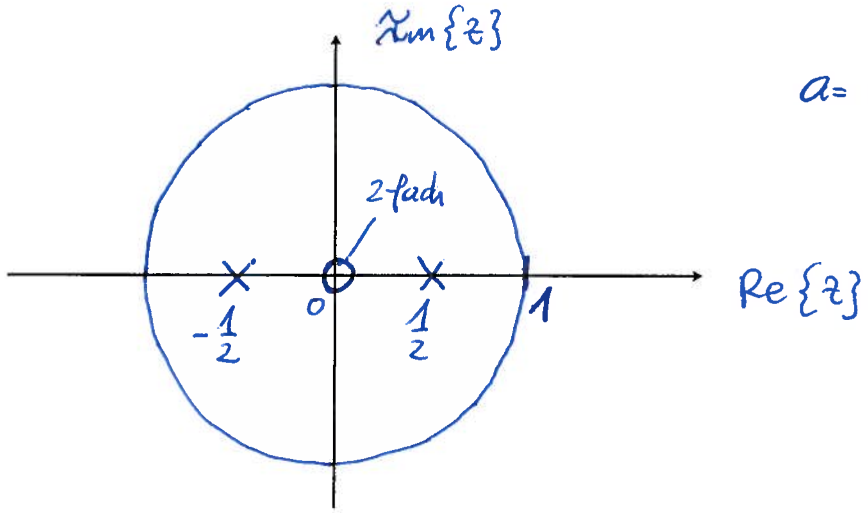
$$x[n] = e^{j\pi n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\, \delta_{2\pi}(\theta - \pi) \quad , \quad Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})\, H(e^{j\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) = 2\pi\, \delta_{2\pi}(\theta-\pi)\, \frac{e^{j2\theta}}{e^{j2\theta} - 1/4} = 2\pi\, \delta_{2\pi}(\theta-\pi)\, \frac{e^{j2\pi}}{e^{j2\pi} - 1/4}$$

B: $\frac{9}{8} \cdot (-1)^n$

$$= 2\pi\, \delta_{2\pi}(\theta-\pi)\, \frac{1}{1 - 1/4} = 2\pi\, \delta_{2\pi}(\theta-\pi) \cdot \frac{4}{3} \ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{4}{3} e^{j\pi n} = \underline{\underline{\frac{4}{3}(-1)^n = y[n]}}$$

(e) (3 Punkte) Zeichnen Sie das Pol- / Nullstellendiagramm für ein beliebiges $a \neq 0$.



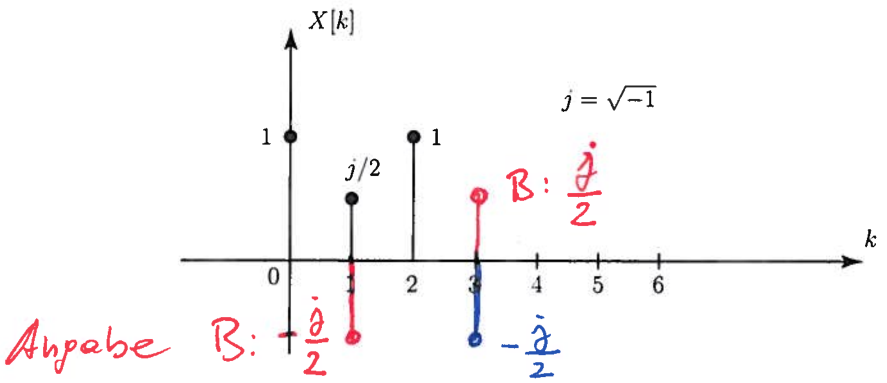
$a = \frac{1}{4}$

(f) (2 Punkte) Für welche Werte von $a \neq 0$ ist das Filter stabil?

$$0 < |a| < 1$$

Aufgabe 3: (23 Punkte)

Von einem *reellen* N-Punkte-Signal ($N = 4$) ist die DFT $X[k]$, für $k = 0, \ldots, N/2$ gegeben:



(a) (6 Punkte) Ergänzen Sie $X[k]$ für $k = N/2 + 1, \ldots, N - 1$.

$$X^*[k] = X[N-k]$$

$$\Rightarrow X[3] = -j/2 \qquad \text{B: } X[3] = \frac{j}{2}$$

(b) (9 Punkte) Welche der angegebenen Lösungen für $x[n]$ ist richtig? *Kreuzen Sie die richtige Antwort an!*

A. $\frac{1}{4}\left[1 - (-1)^n + j\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$ ○

B. $\frac{1}{4}\left[1 + (-1)^n - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$ ○

C. $\frac{1}{4}\left[1 + (-1)^n \overset{+}{-} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$ ☒

D. $\frac{1}{4}\left[1 + (-1)^n + j\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$ ○

E. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

$$x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4}\Big(1 \overset{-}{+} \frac{j}{2}\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}n}}_{e^{j\frac{\pi}{2}n}} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 2n}}_{(-1)^n} \overset{+}{-} \frac{j}{2}\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3n}}_{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + (-1)^n \overset{+}{-} \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[1 + (-1)^n \overset{+}{-} \sin\frac{\pi}{2}n\right]$$

(c) (8 Punkte) Die DFT eines 4-Punkte-Signals $x[n]$ sei $X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{4}7k}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Das zugehörige Zeitsignal ist: $B: X[k] = e^{\frac{2\pi}{4}\cdot 6k}$
Kreuzen Sie die korrekte Antwort an!

A. Keine der anderen Lösungen ist richtig. X ☒
B. $x[n] = \delta[n-1] \quad n = 0, \ldots, 3$ ○
C. $x[n] = \delta[n-2] \quad n = 0, \ldots, 3$ B: ☒ X*
D. $x[n] = \delta[n-3] \quad n = 0, \ldots, 3$ ☒ 2
E. $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-3] \quad n = 0, \ldots, 3$ ○

X* unter Vernachlässigung des Vorfaktors N

Aufgabe 4: (25 Punkte)

(a) (9 Punkte) Von welchen Signalen $x[n]$, $\forall n$, existiert eine $\mathcal{Z}$-Transformierte?
Kreuzen Sie die korrekte(n) Antwort(en) an!

A. $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n+1]$ ☒
B. $x[n] = \sum_{k=0}^{3} \sigma[n-k]$ ☒
C. $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+5k]$ ○
D. $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{3}n) \cdot \sigma[n]$ ☒
E. $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{5}n}$ ○

(b) (8 Punkte) Ein stabiles und kausales Digitalfilter mit reellwertigen Koeffizienten hat die Übetragungsfunktion $H(z)$, mit folgenden Eigenschaften:
Kreuzen Sie die korrekte(n) Antwort(en) an!

A. Alle Nullstellen von $H(z)$ müssen im Inneren des Einheitskreises liegen. ○
B. Die Pole von $H(z)$ liegen im Inneren des Einheitskreises. ☒
C. $\lim_{z\to\infty} H(z) < \infty$. ☒
D. $\lim_{z\to\infty} H(z) = \infty$. ○
E. Alle Pole und Nullstellen von $H(z)$ müssen reell sein. ○

(c) (8 Punkte) Ein Digitalfilter mit reellwertigen Koeffizienten wird durch eine Differenzengleichung beschrieben: *Kreuzen Sie die korrekte(n) Antwort(en) an!*

A. Die Impulsantwort $h[n]$ beinhaltet den Einfluss der Anfangsbedingungen. ○

B. Die Anfangsbedingungen beeinflussen das Einschwingverhalten des Filters. ☒

C. Ein Filter mit exakt linearem Phasenverlauf hat im Allgemeinen eine Differenzengleichung ohne rekursiven Anteil. ☒

D. Die Übetragungsfunktion $H(z)$ kann nicht eindeutig aus der Differenzengleichung des digitalen Filters bestimmt werden. ○