

ZUNAME:
 VORNAME:
 MAT. NR.:

2. SuS2-Teilprüfung B
 Institute of Telecommunications
 G. Doblinger, J. Gonter
 TU-Wien 20.6.2012

Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	36	18	24	22	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (36 Punkte)

Von einem zeitdiskreten System ist die folgende Impulsantwort $h[n]$ gegeben:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1] \text{ (mit der Sprungfunktion } \sigma[n]\text{)}$$

Mit diesem System wird ein neues System gebildet, dessen Übertragungsfunktion $G(z)$ sich durch die Transformation

$$G(z) = H(z^4)$$

aus der Übertragungsfunktion $H(z)$ des gegebenen Systems ergibt.

(a) (6 Punkte) Beweisen Sie zunächst den allgemeinen Zusammenhang

$$Y(z) = X(z^N) \Rightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{N}], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\left(X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad / \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \right)$$

$$X(z^N) \stackrel{!}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[\frac{n}{N}\right] z^{-n}$$

Subst.: $m = \frac{n}{N}$

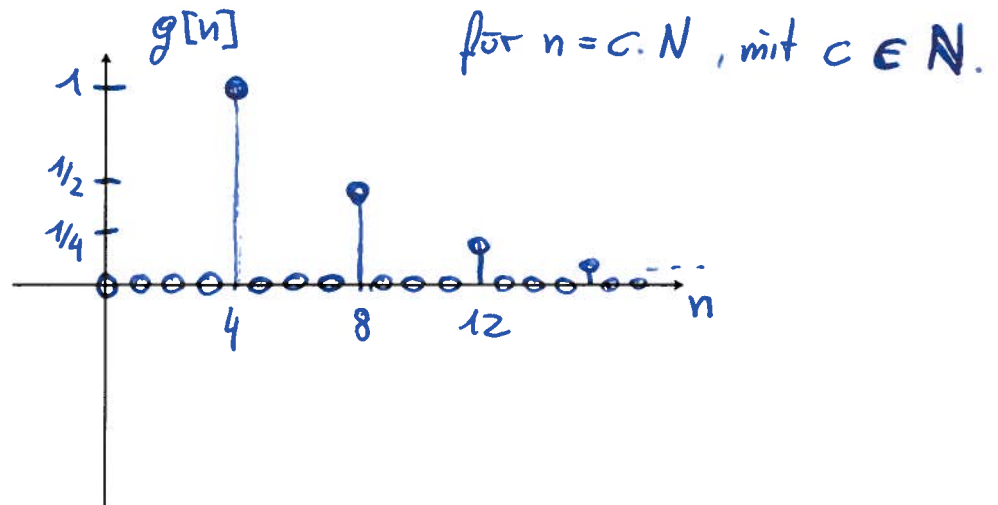
$$\sum_{m \cdot N = -\infty}^{\infty} x[m] z^{-m \cdot N}$$

\Rightarrow 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^N\right)^{-m}$$

- (b) (4 Punkte) Verwenden Sie den Zusammenhang aus (a) zur Berechnung der Impulsantwort $g[n]$ des neuen Systems für das gegebene $h[n]$. Skizzieren Sie $g[n]$. Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!

$$h[n]^{n-1} \sigma[n-1] \Rightarrow g[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{N}-1} \sigma\left[\frac{n}{N}-1\right]$$



- (c) (4 Punkte) Berechnen Sie $G(z)$ aus dem gegebenen $h[n]$.

$$H(z) = \frac{1}{z - 1/2} \Rightarrow G(z) = H(z^4) = \frac{1}{z^4 - 1/2}$$

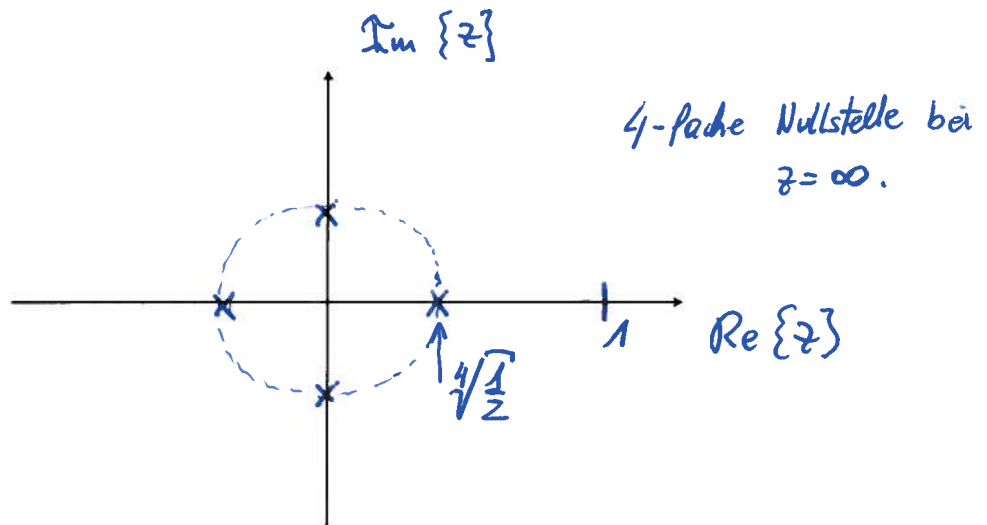
- (d) (6 Punkte) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm von $G(z)$. Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!

Nullstelle von $G(z)$: $z = \infty$

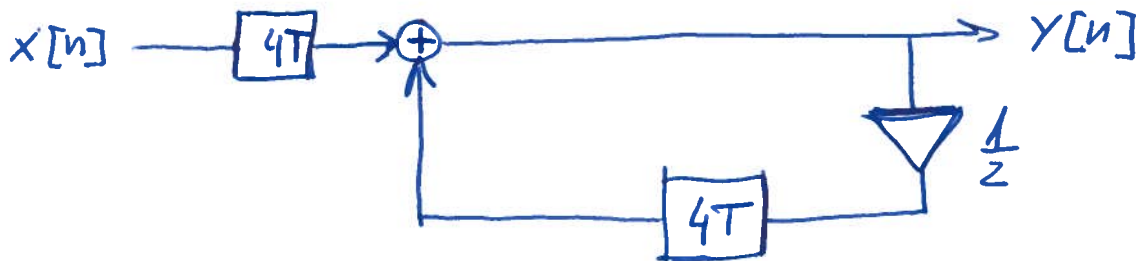
Pole von $G(z)$: $z^4 = \frac{1}{2} \xrightarrow{z^2 = l} l^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$z_{3,4} = \pm j \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$



- (e) (4 Punkte) Entwerfen Sie ein Schaltbild des neuen Systems mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ und geben Sie die zugehörige Differenzgleichung an. Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein!



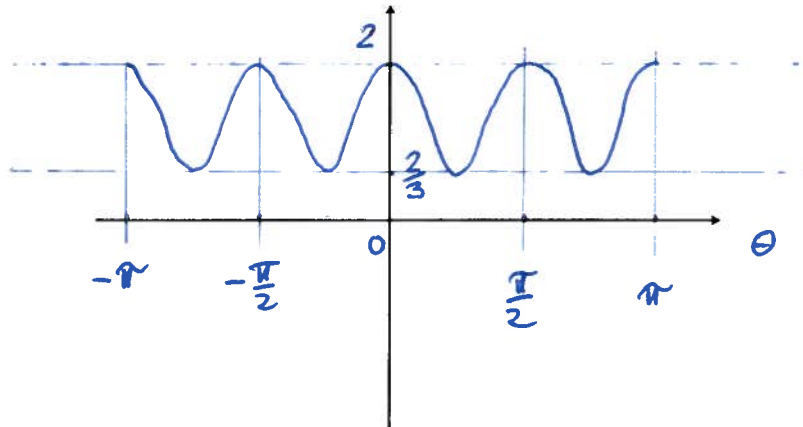
$$Y[n] = X[n-4] + \frac{1}{2}Y[n-4]$$

- (f) (6 Punkte) Skizzieren Sie den Betragsverlauf des Frequenzgangs $|G(e^{j\theta})|$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$ und bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert von $|G(e^{j\theta})|$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Aus dem Pol/Nullstellendiagramm ist die Lage der Maxima und Minima direkt ablesbar:

Max. bei $\theta = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi : |G(e^{j\theta})| = 2$

Min. bei $\theta = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} : |G(e^{j\theta})| = \frac{2}{3}$

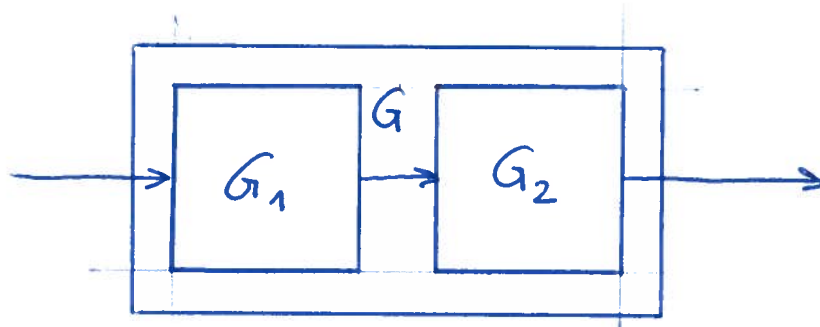


(g) (6 Punkte) Realisieren Sie $G(z)$ als Kaskadenschaltung (Kettenschaltung) zweier Filterblöcke zweiten Grades mit den Teilübertragungsfunktionen

$$G_i(z) = \frac{z^2 + b_{1,i}z + b_{2,i}}{z^2 + a_{1,i}z + a_{2,i}} \quad i = 1, 2$$

und berechnen Sie die Filterkoeffizienten von $G_i(z)$ für das gegebene $h[n]$. Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein! Skizzieren Sie das Blockschaltbild.

$$G(z) = \frac{1}{z^4 - \frac{1}{2}} \Rightarrow G_1(z) = \frac{1}{z^2 + \sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z^2 - \sqrt{\frac{1}{2}}}$$



Aufgabe 2: (18 Punkte)

Wir wollen die diskreten Fouriertransformationen (DFTs) von zwei geraden, reellwertigen N -Punkte-Signalen $x_1[n], x_2[n]$, $n = 0 \dots N - 1$ mit einer einzigen DFT berechnen. Dazu bilden wir das komplexwertige Signal

$$y[n] = x_2[n] + jx_1[n], \quad n = 0 \dots N - 1.$$

- (a) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass zwischen den DFTs $X_1[k]$, $X_2[k]$ der Signale $x_1[n]$, $x_2[n]$ und der DFT $Y[k]$ von $y[n]$ folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \Im\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1 \\ X_2[k] &= \Re\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1 \end{aligned}$$

Da $x_1[n]$ und $x_2[n]$ gerade Signale sind, müssen $X_1[k]$ und $X_2[k]$ reell sein.

Aus der Linearität der DFT folgt

$$Y = X_2 + jX_1 \iff Y = X_2 + jX_1$$

und daher:

$$\Re\{Y[k]\} = X_2[k], \quad \Im\{Y[k]\} = X_1[k]$$

- (b) (10 Punkte) Berechnen Sie die DFTs der folgenden beiden N-Punkte-Signale und prüfen Sie, ob die Zusammenhänge aus (a) erfüllt sind:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right), \quad n = 0 \dots N-1 \\ x_2[n] &= \delta[n-1] + \delta[n-N+1], \quad n = 0 \dots N-1 \end{aligned}$$

$$X_1[k] = \frac{N}{2} \delta[k-2] + \frac{N}{2} \delta[k+2-N]$$

$$X_2[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N-1)} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$Y[n] = j \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1]$$

$$\begin{aligned} \Re\{Y[k]\} &\iff \frac{1}{2} \left[j \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right. \\ &\quad \left. - j \cos\left(-\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right] \end{aligned}$$

5

$$= \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \iff X_2[k]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m \{Y[k]\} &\Leftrightarrow \frac{1}{2j} \left[j \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right. \\ &\quad \left. + j \cos\left(-\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) - \delta[-n-1] - \delta[-n-N+1] \right] \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) \Leftrightarrow X_1[k]. \end{aligned}$$

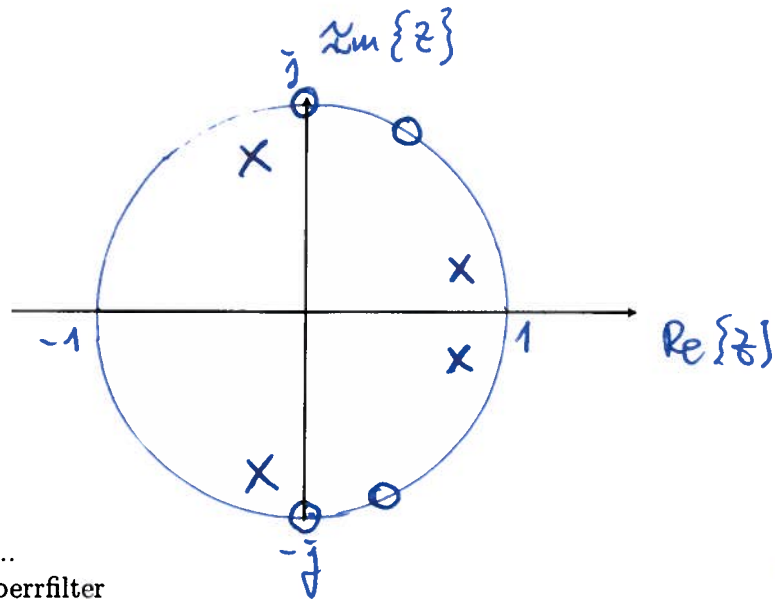
Aufgabe 3: (24 Punkte)

Theorieteil "Digitale Filter"

- (a) (6 Punkte) Beim FIR-Filterentwurf mit der Fenstermethode:
- A. wird die Impulsantwort eines idealisierten Filters mit einem Zeitfenster gefaltet.
 - B. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters multipliziert.
 - C. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters gefaltet.
 - D. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter kleiner.
 - E. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter größer.
 - F. wird die Impulsantwort in bestimmten Zeitintervallen auf Null gesetzt.
 - G. Keine der anderen Lösungen ist richtig.
- (b) (6 Punkte) Die folgenden Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion eines digitalen Filters sind gegeben:

$$\text{Pole: } -\frac{1}{4} \pm j\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \pm j\frac{1}{4} \quad \text{Nullstellen: } e^{\pm j\pi/2}, e^{\pm j\pi/3}$$

Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*



Das Filter ist...

- A. ein Bandsperrfilter
- B. ein Tiefpassfilter
- C. ein Hochpassfilter
- D. ein Bandpassfilter
- E. ein Hilberttransformator
- F. keine der anderen Lösungen ist richtig.

-
-
-
-
-
-

(c) (6 Punkte) Die Z -Transformation $X(z)$ eines rechtsseitigen, stabilen, zeitdiskreten Signals:

- A. hat immer alle Pole innerhalb des Einheitskreises.
- B. kann *gleichzeitig* Pole innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises haben.
- C. kann alle Pole in $z = \infty$ haben.
- D. hat immer alle Pole ausserhalb des Einheitskreises.
- E. kann alle Pole im Ursprung $z = 0$ haben.
- F. keine der anderen Lösungen ist richtig.

-
-
-
-
-
-

(d) (6 Punkte) Die Differenzgleichung $y[n-2] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n] = x[n]$ mit Anfangsbedingungen $y[-2] = y[-1] = 0$:

- A. beschreibt ein digitales Filter mit nichtlinearem Phasengang der Übertragungsfunktion.
- B. beschreibt ein stabiles digitales Filter.
- C. beschreibt ein digitales Filter mit linearem Phasengang der Übertragungsfunktion.
- D. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer.
- E. beschreibt ein instabiles digitales Filter.
- F. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort unendlicher Dauer.
- G. keine der anderen Lösungen ist richtig.

-
-
-
-
-
-
-
-

Aufgabe 4: (22 Punkte)

Theorieteil "diskrete Fouriertransformation (DFT)"

- (a) (8 Punkte) Ein analoges (zeitkontinuierliches) Signal mit einer Dauer von 0.005 Sekunden wird mit einer Abtastfrequenz von 10 kHz abgetastet. Die Abtastwerte werden als zeitdiskretes Signal $x[n]$ gespeichert. Mit Verwendung der DFT soll das verzögerte Signal $x[n - N_d]$ erzeugt werden, mit $N_d = 10$. Dazu muss die DFT $X[k]$ von $x[n]$ berechnet werden, und zwar:
- A. mit Anfügen von 10 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{60}k \cdot N_d}$.
 - B. mit Anfügen von 5 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{60}k \cdot N_d}$.
 - C. mit einer DFT der Länge $N = 50$ und Multiplikation von $X[k]$ mit $e^{-j\frac{2\pi}{50}k \cdot N_d}$.
 - D. mit Anfügen von 10 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{50}k \cdot N_d}$.
 - E. keine der anderen Antworten ist richtig
- (b) (6 Punkte) Für reellwertige N -Punkte Signale:
- A. ist der Imaginärteil von $X[k]$ null.
 - B. ist die Phase von $X[k]$ eine ungerade Funktion.
 - C. ist der Imaginärteil von $X[k]$ eine ungerade Funktion.
 - D. ist der Betrag von $X[k]$ eine ungerade Funktion.
 - E. gilt immer $X[N - k] = X[k]$.
 - F. ist der Realteil der DFT $X[k]$ eine ungerade Funktion.
 - G. keine der anderen Antworten ist richtig
- (c) (8 Punkte) Ein N -Punkte Signal mit den Eigenschaften $x[n] = x[N - 1 - n]$, $x[0] \neq 0$, $x[N/2] \neq 0$ (N gerade):
- A. hat eine DFT mit $\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X[k] = 0$.
 - B. hat eine DFT mit $\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = 0$.
 - C. hat eine DFT mit $X[N/2] = 0$.
 - D. hat eine DFT $X[k]$ mit $X[0] = 0$.
 - E. keine der anderen Antworten ist richtig