Lösungen zur 2. Teilprüfung

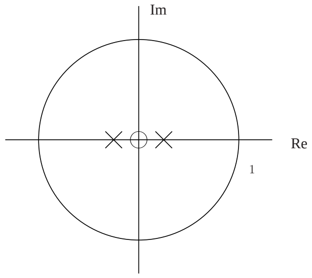
Signale und Systeme 2, Sommersemester 2009

Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik E389
17.6.2009 C. Novak

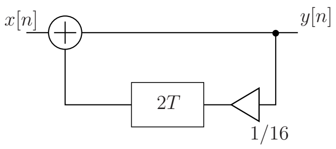
Gruppe A

- **Beispiel 1**

a) Pole: $z_\infty = \pm\frac{1}{4}$
Nullstelle: $z_0 = 0$ (2-fach)
Skizze:

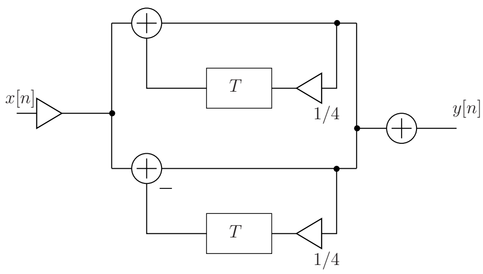


b) $H(z) = \frac{1}{1-1/16z^{-2}} \rightarrow y[n] - \frac{1}{16}y[n-2] = x[n]$
Schaltbild:



c) $H(z) = z^2\left[\frac{2}{z-1/4} - \frac{2}{z+1/4}\right]$ (Partialbruchzerlegung)
Polynomdivision der beiden Terme ergibt $H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-1/4z^{-1}} + \frac{1}{1+1/4z^{-1}}\right]$

d) Schaltbild:

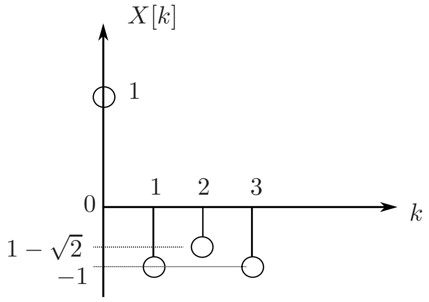


e) $h[n] = \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{4})^n + (-\frac{1}{4})^n\right]\sigma[n]$

- **Beispiel 2**

  b) $X(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-3}$
  Konvergenzbereich: $z > 0$

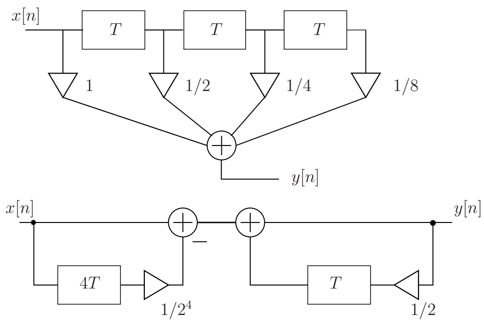
  c) $X[k] = X(z)|_{z=e^{2\pi k/N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j3\pi k/2}$



- **Beispiel 3**

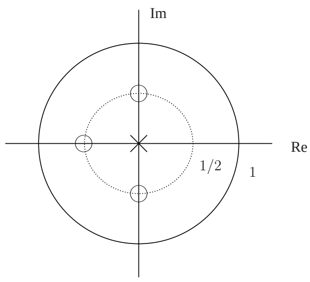
a) $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} (a/z)^k = \frac{1-(a/z)^N}{1-a/z}$ (Definition der z-Transformation, endliche geometrische Reihe)

b) $N = 4, a = 1/2 : H(z) = \frac{1-(1/2)^4 z^{-4}}{1-1/2\, z^{-1}} \rightarrow y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2^4}x[n-4]$
Schaltbild (2 Varianten)



c) $H(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$
Pole: $z_\infty = 0$ (N-1 facher Pol), $z_\infty = a$
Nullstellen: $z^N = a^N \rightarrow z_0 = a\, e^{j2\pi k/N}$, $k = 0, \ldots, N-1$ (ein Polynom der Ordnung N hat N Nullstellen!)
Pol bei $z_\infty = a$ und Nullstelle bei $z_0 = a$ (entspricht $k = 0$) kompensieren sich!

Pol/Nullstellendiagramm:

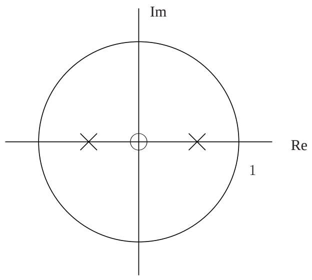


d) Aus dem Schaltbild folgt $y[n] = x[n] + b_1 x[n-N] + a_1 y[n-1] \rightarrow H(z) = \frac{1+b_1 z^{-N}}{1-a_1 z^{-1}}$; Koeffizientenvergleich ergibt $a_1 = a, b_1 = -a^N$

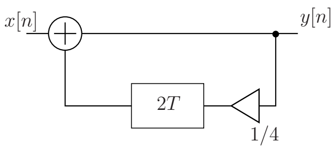
Gruppe B

- **Beispiel 1**

  a) Pole: $z_\infty = \pm\frac{1}{2}$
  Nullstelle: $z_0 = 0$ (2-fach)
  Skizze:

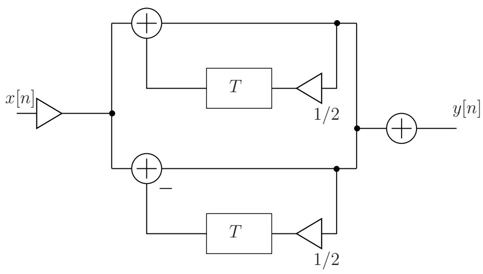
  

  b) $H(z) = \frac{1}{1-1/4z^{-2}} \rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$
  Schaltbild:

  c) $H(z) = z^2\left[\frac{2}{z-1/2} - \frac{2}{z+1/2}\right]$ (Partialbruchzerlegung)
  Polynomdivision der beiden Terme ergibt $H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-1/2z^{-1}} + \frac{1}{1+1/2z^{-1}}\right]$

  d) Schaltbild:

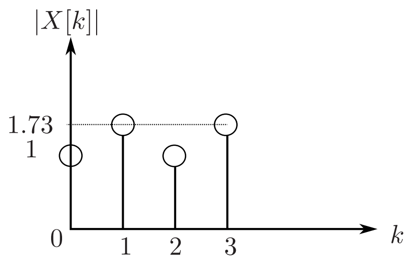
  e) $h[n] = \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n\right]\sigma[n]$

- **Beispiel 2**

  b) $X(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-3}$

  Konvergenzbereich: $z > 0$

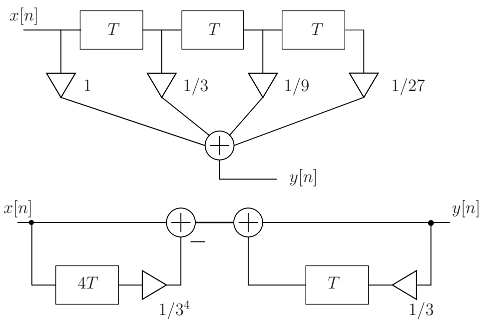
  c) $X[k] = X(z)|_{z=e^{2\pi k/N}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi k/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j3\pi k/2}$



- **Beispiel 3**

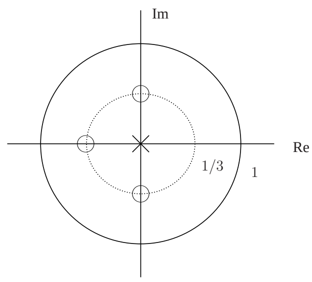
  a) $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} (a/z)^k = \frac{1-(a/z)^N}{1-a/z}$ (Definition der z-Transformation, endliche geometrische Reihe)

  b) $N = 4, a = 1/3 : H(z) = \frac{1-(1/3)^4 z^{-4}}{1-1/3\, z^{-1}} \rightarrow y[n] - \frac{1}{3} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{3^4} x[n-4]$
  Schaltbild



  c) $H(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$
  Pole: $z_\infty = 0$ (N-1 facher Pol), $z_\infty = a$
  Nullstellen: $z^N = a^N \rightarrow z_0 = a\, e^{j2\pi k/N}$, $k = 0, \ldots, N-1$ (ein Polynom der Ordnung N hat N Nullstellen!)
  Pol bei $z_\infty = a$ und Nullstelle bei $z_0 = a$ (entspricht $k = 0$) kompensieren sich!

  Pol/Nullstellendiagramm:



  d) Aus dem Schaltbild folgt $y[n] = x[n] + b_1 x[n-N] + a_1 y[n-1] \rightarrow H(z) = \frac{1+b_1 z^{-N}}{1-a_1 z^{-1}}$; Koeffizientenvergleich ergibt $a_1 = a, b_1 = -a^N$