ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

1. Teilprüfung 389.055 A
Signale und Systeme 2
Institute of Telecommunications
TU-Wien **15.04.2016**

Bitte beachten Sie:

- Bitte legen Sie Ihren **Studierendenausweis auf Ihrem Tisch** zur Überprüfung bereit.
- **Mobiltelefone** müssen während der Prüfung **ausgeschaltet** sein und dürfen **nicht auf dem Tisch** liegen!
- Neben Schreibwerkzeugen und einfachen, nicht-programmierten Taschenrechnern ist als Hilfsmittel die SuS2-Formelsammlung erlaubt – sonst nichts!
- **Wichtig:** Bitte beachten Sie, dass Schummeln, wie z.B. die Verwendung nicht erlaubter Hilfsmittel, studienrechtliche und prüfungsrelevante Konsequenzen hat.
- Bitte verwenden Sie einen **permanent färbenden, nicht-roten Stift**.
- Die Beispiele sind ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe auszuarbeiten. **Mitgebrachte Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Sofern weitere Leerseiten zur Bearbeitung der Beispiele benötigt werden, sind diese bei der Klausuraufsicht erhältlich.
- Bitte bearbeiten Sie ***nicht*** **mehr als ein Beispiel auf einem Blatt**.
- Bitte kennzeichnen Sie auf **jeder Seite** eindeutig, welche **Aufgabe** und welcher **Unterpunkt** behandelt wird.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**!
- Diese **Angabe *muss*, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet,** bei der Klausuraufsicht **abgegeben werden**. **Sie dürfen diese Angabe *nicht* mitnehmen!**
- Sofern Sie nicht wollen, dass Ihre Bearbeitung eines Beispiels gewertet wird, streichen Sie die entsprechenden Seiten klar ersichtlich durch.
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** sind Voraussetzungen für die positive Beurteilung der Arbeit!
- Bitte **bleiben Sie bei Klausurende** so lange **auf Ihrem Platz**, bis alle Klausuren eingesammelt sind und die Klausuraufsicht die Freigabe zum Verlassen der Hörsaals erteilt.
- Sofern Sie während der Klausur zur Toilette müssen, melden Sie sich bitte rechtzeitig bei der Klausuraufsicht. Bitte **verlassen Sie nicht ohne Rücksprache mit der Klausuraufsicht den Hörsaal**.
- Sofern Sie vor dem Klausurende gehen wollen, tun Sie dies bitte **nicht in den letzten 15min** vor dem Ende der Klausur. Melden Sie sich bevor Sie gehen bei der Klausuraufsicht und geben Sie Ihre Angabe ab.

Abgabezeit: (wird nur bei vorzeitiger Abgabe von der Klausuraufsicht ausgefüllt) . . . . . .

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	35	35	15	15	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Gegeben ist ein System, das mit der Impulsantwort

$$h[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}\sigma[n+1]\sigma[-n+1]\cos(\pi n)$$

vollständig beschrieben ist.

(a) (10 Punkte) Skizzieren und vereinfachen Sie die Impulsantwort so weit wie möglich!

Es gilt $\cos(\pi n) = 1$ für $n = ..., -4, -2, 0, 2, 4, ...$ und $\cos(\pi n) = -1$ für $n = ..., -3, -1, 1, 3, ...$ Daher gilt $\cos(\pi n) = (-1)^n$.
Weiterhin gilt $\sigma[n+1] = 1$ für $n \geq -1$, und $\sigma[n+1] = 0$ für $n < -1$.
Für den zweiten Sprung gilt $\sigma[-n+1] = 1$ für $n \leq 1$, und $\sigma[-n+1] = 0$ für $n > 1$. Damit überlappen die Bereiche, in denen beide Sprungsignale gleich 1 sind, nur für die Werte $n = -1, 0, 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} h[n] &= \begin{cases} (\frac{1}{2})^{|n|}(-1)^n \ , & n = -1, 0, 1 \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|}, & n = -1, 0, 1 \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ -\frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] \ . \end{aligned}$$

(b) (9 Punkte) Ist das System linear/kausal/stabil? Begründen Sie Ihre Antworten!

- Das System *ist* linear, denn es ist mit der o.g. Impulsantwort lt. Aufgabenstellung *vollständig* beschrieben.
- Das System ist *nicht* kausal, denn es gilt *nicht* $h[n] = 0$ für $n < 0$.
- Das System *ist* stabil, weil seine Impulsantwort endlich lang und die Amplituden seiner Impulsantwort beschränkt sind.

(c) (10 Punkte) Das System wird mit dem Eingangssignal $x[n] = \sigma[n] - \sigma[n-4]$ angeregt. Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y[n]$! Gehen Sie dabei davon aus, dass vor dem Anlegen des Signals $x[n]$ alle internen Zustände des Systems gleich Null sind.

Das Ausgangssignal kann durch die Faltung

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]x[k]$$

Bei Verwendung der rechten Summe:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{3} h[n-k] \cdot 1 \\
&= \sum_{k=0}^{3} \Big(-\frac{1}{2}\delta[n-k+1] + \delta[n-k] - \frac{1}{2}\delta[n-k-1] \Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\Big)... \\
&\qquad + 1\Big(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\Big)... \\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\delta[n+1] + \Big(-\frac{1}{2}+1\Big)\delta[n] + \Big(-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\Big)\delta[n-1]... \\
&\qquad + \Big(-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\Big)\delta[n-2] + \Big(+1-\frac{1}{2}\Big)\delta[n-3] + \Big(-\frac{1}{2}\Big)\delta[n-4] \\
y[n] &= -\frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]
\end{aligned}$$

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie die Signalenergie und die mittlere Signalleistung des Ausgangssignals $y[n]$!

Signalenergie:

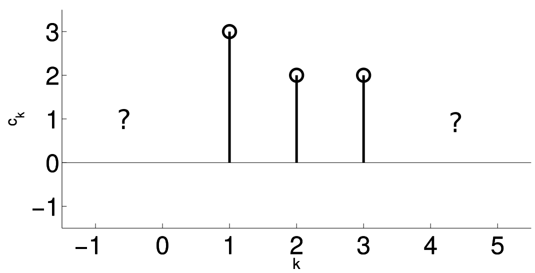
$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n] = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Mittlere Signalleistung:

$$P_y = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{+L} y^2[n] = E_y \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} = 0\,.$$

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Gegeben sind einige Fourierreihenkoeffizienten c_k des reellen, geraden, 5-periodischen Signals $x[n]$:



(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten c_k, sodass für die Signalleistung gilt $P_x = 30$! (Hinweis: Überprüfen Sie, ob es mehrere Lösungen gibt!)

Da das Signal gerade ist, gilt $x[n] = x[-n]$. Andererseits gilt mit den Fourier-Reihenkoeffizienten $c_k \Leftrightarrow x[n]$ wegen der Symmetrieeigenschaft $x[-n] \Leftrightarrow c_{-k} = c_{N-k}$, $n, k = 0, 1, ..., N-1$ damit auch $c_k = c_{N-k}$, $k = 0, 1, ..., N-1$, für die Fourier-Reihenkoeffizienten eines geraden Signals. Damit folgt sofort $c_4 = c_{N-1} = c_1 = 3$.

Aus der Parsevalschen Gleichung:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \stackrel{!}{=} 30\ .$$

Da das Signal reell ist, ist auch der Mittelwert reel, und es folgen die Lösungen

$$|c_0| = \sqrt{30 - 26} = 2 \Rightarrow c_0 = \pm 2\ .$$

(b) (10 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie das Signal $x[n]$, gegeben dass $x[n]$ einen nichtnegativen Mittelwert besitzt!

Aus $c_0 = \pm 2$ und positivem Mittelwert ergibt sich die Wahl $c_0 = 2$. Die Fourier-Rücktransformation lautet für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $q = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 2e^{j0} + 3e^{j\frac{2\pi}{5}n} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}3n} + 3e^{j\frac{2\pi}{5}4n} \\ &= 2 + 3\left(e^{j\frac{2\pi n}{5}} + e^{j\frac{8\pi n - q10\pi}{5}}\right) + 2\left(e^{j\frac{4\pi n}{5}} + e^{j\frac{6\pi n - q10\pi}{5}}\right) \\ &= \begin{cases} 12\ , & n = 0 \\ 2 + 6\cos(\frac{2\pi}{5}) + 4\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) \approx 0.61, & n = 1 \\ 2 + 6\cos(\frac{4\pi}{5}) + 4\cos(\frac{2\pi}{5}) = 2\cos(\frac{4\pi}{5}) \approx -1.61, & n = 2 \\ 2 + 6\cos(\frac{4\pi}{5}) + 4\cos(\frac{2\pi}{5}) = 2\cos(\frac{4\pi}{5}) \approx -1.61, & n = 3 \\ 2 + 6\cos(\frac{2\pi}{5}) + 4\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) \approx 0.61, & n = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

mit $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$ und $\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$.

(c) (10 Punkte) Berechnen Sie die Fourierreihenkoeffizienten d_k des Ausgangssignals $y[n]$ des Systems mit der Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\,,\ -\pi \leq \theta < \pi$ und Eingangssignal $x[n]$!

Die Fourier-Reihe des Ausgangssignals lautet für $n = 0, 1, ..., N-1$ wie folgt (siehe Vorlesung)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{mit} \quad d_k = H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})c_k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\,c_k$$

Mit $c_k = \{2, 3, 2, 2, 3\}$ folgt

$$\begin{aligned} d_k &= c_k e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \\ &= \begin{cases} 2\,, & k = 0 \\ 3e^{-j\frac{2\pi}{5}}\,, & k = 1 \\ 2e^{-j\frac{4\pi}{5}}\,, & k = 2 \\ 2e^{-j\frac{6\pi}{5}} = 2e^{j\frac{4\pi}{5}}\,, & k = 3 \\ 3e^{-j\frac{8\pi}{5}} = 3e^{j\frac{2\pi}{5}}\,, & k = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y[n]$!

Die Fourier-Reihe des Ausgangssignals lautet für $n = 0, 1, ..., N-1$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-1)}$$

Durch Substitution von $n-1$ folgt

$$y[n+1] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad = \quad x[n]$$

wobei die mittlere Summe identisch der Fourier-Reihendarstellung von $x[n]$ ist. Somit ist das Ausgangssignal des Systems eine zeitlich verschobene Version des Eingangssignals. Wegen der Periodizität gilt weiterhin $y[N] = y[0]$ und damit (siehe Teil (b))

$$Gabor: y[n] = \begin{cases} x[-1] = x[1] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\,, & n = 0 \\ x[0] = 12, & n = 1 \\ x[1] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\,, & n = 2 \\ x[2] = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\,, & n = 3 \\ x[3] = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\,, & n = 4 \end{cases}\,.$$

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Bestimmen Sie die zutreffenden Antworten und kreuzen Sie diese an.

Jede korrekte Antwort wird mit +1 Punkt gezählt. Keine Antwort oder das Ankreuzen beider Alternativen werden mit 0 Punkten gezählt. Eine falsche Antwort wird mit −1 Punkt gezählt. Die Punkte werden für die gesamte Aufgabe summiert; eine negative Gesamtsumme wird auf Null gesetzt.

(a) (4 Punkte) Die Digitale Signalverarbeitung hat in der praktischen Realisierung folgende Vorteile:

		Richtig	Falsch
A)	Absolut exakte Darstellung *wertkontinuierlicher* Signale.	○	⊗
B)	Kein Einfluss von Bauteiltoleranzen.	⊗	○
C)	Verlustfreie Speicherung/Übertragung *digitaler* Signale.	⊗	○
D)	Unendliche Rechengenauigkeit.	○	⊗

(b) (4 Punkte) Bei einer zeitdiskreten Fourier-Reihe

		Richtig	Falsch
A)	wird das Zeitsignal der Periode N – ohne das Gibbssche Phänomen – korrekt dargestellt, wenn in der Reihendarstellung alle N Terme berücksichtigt werden.	⊗	○
B)	mit der Grundperiode N müssen genau $N+1$ komplexe Exponenzielle berücksichtigt werden.	○	⊗
C)	kann die Leistung des Signals aus den Reihenkoeffizienten direkt und exakt berechnet werden.	⊗	○
D)	kann eine bekannte Reellwertigkeit des Zeitsignals zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten mit geringerem Rechenaufwand ausgenutzt werden.	⊗	○

(c) (4 Punkte) Folgende Aussagen gelten für lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Systeme:

		Richtig	Falsch
A)	Sie sind immer stabil.	○	⊗
B)	Ein Signal $x[n] = e^{j\theta n}$ am Eingang erscheint mit gleicher Frequenz θ auch am System-Ausgang.	⊗	○
C)	Sie können *keine* unendlich lange Impulsanwort haben.	○	⊗
D)	Sie sind durch ihre Impulsantwort eindeutig beschrieben.	⊗	○

(d) (3 Punkte) Ein periodisches zeitdiskretes Signal, das mindestens einen von Null verschiedenen Signalwert besitzt,

		Richtig	Falsch
A)	kann eine beschränkte Energie haben.	○	⊗
B)	hat eine beschränkte Leistung, wenn seine Amplituden beschränkt sind.	⊗	○
C)	ist durch $x[n] = \cos(\theta n)$ mit $\theta = \frac{3}{2}$ gegeben.	○	⊗

Aufgabe 4: (15 Punkte)

Bestimmen Sie die zutreffenden Antworten und kreuzen Sie diese an.

Jede korrekte Antwort wird mit +1 Punkt gezählt. Keine Antwort oder das Ankreuzen beider Alternativen werden mit 0 Punkten gezählt. Eine falsche Antwort wird mit −1 Punkt gezählt. Die Punkte werden für die gesamte Aufgabe summiert; eine negative Gesamtsumme wird auf Null gesetzt.

(a) (4 Punkte) Jedes *gerade* Signal $x[n]$, welches periodisch mit der Periode $N = 4$ ist, hat folgende Eigenschaften:

		Richtig	Falsch
A)	$x[n+3] = x[-n-7]$	$\otimes$	$\bigcirc$
B)	$x[n-4] = x[-n+1]$	$\bigcirc$	$\otimes$
C)	$x[n] = -x[-n]$	$\bigcirc$	$\otimes$
D)	$x[n] = x[-n]$	$\otimes$	$\bigcirc$

(b) (4 Punkte) Gegeben sei ein kausales, lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Impulsantwort $h[n]$, dem Ausgangssignal $y[n]$ und dem Eingangssignal $x[n]$. Alle Signale $x[n], y[n], h[n]$ sind für $n = -\infty, ..., -1, 0, 1, ... + \infty$ definiert, und es soll weiterhin gelten $x[n] = 0$ für $n < 0$ und $n > N$.

Welche der folgenden Formeln/Aussagen sind richtig bzw. falsch?

		Richtig	Falsch
A)	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]$	$\otimes$	$\bigcirc$
B)	$y[n] = \sum_{k=0}^{N} h[k]x[n-k]$	$\bigcirc$	$\otimes$
C)	$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$	$\otimes$	$\bigcirc$
D)	$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$	$\otimes$	$\bigcirc$

(c) (4 Punkte) Die folgenden Beziehungen zwischen dem Eingangssignal $x[n]$ und dem Ausgangssignal $y[n]$ beschreiben lineare, zeitdiskrete Systeme:

		Richtig	Falsch
A)	$y[n] = x[n] \cdot x[n-2]$	$\bigcirc$	$\otimes$
B)	$y[n] = \sqrt{x[n]}$	$\bigcirc$	$\otimes$
C)	$y[n] = x[n] + 3x[n-1] + 4x[n+3]$	$\otimes$	$\bigcirc$
D)	$y[n] = x[-n]$	$\otimes$	$\bigcirc$

(d) (3 Punkte) Ein zeitdiskretes System, dessen Antwort $y[n]$ auf das Eingangssignal $x[n] = \delta[n]$ endlich lang ist, mit $|y[n]| < \infty$ für alle $n = -\infty, ..., -1, 0, 1, ... + \infty$ (bei diesem Eingangssignal),

		Richtig	Falsch
A)	ist immmer kausal.	$\bigcirc$	$\otimes$
B)	kann stabil sein.	$\otimes$	$\bigcirc$
C)	ist immer linear.	$\bigcirc$	$\otimes$

Raum für Nebenrechnungen

Raum für Nebenrechnungen