ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

2. Teilprüfung 389.055 A
Signale und Systeme 2

Institute of Telecommunications
TU-Wien **26.06.2017**

Bitte beachten Sie:

- Die Dauer dieser Klausur beträgt **90 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihren **Studierendenausweis auf Ihrem Tisch** zur Überprüfung bereit.
- **Mobiltelefone** müssen während der Prüfung **ausgeschaltet** sein und dürfen **nicht auf dem Tisch** liegen!
- Neben Schreibwerkzeugen und einfachen, nicht-programmierten Taschenrechnern ist als Hilfsmittel die SuS2-Formelsammlung erlaubt – sonst nichts!
- **Wichtig:** Bitte beachten Sie, dass Schummeln, wie z.B. die Verwendung nicht erlaubter Hilfsmittel, studienrechtliche und prüfungsrelevante Konsequenzen hat.
- Bitte verwenden Sie einen **permanent färbenden, nicht-roten Stift**.
- Die Beispiele sind ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe auszuarbeiten. **Mitgebrachte Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Sofern weitere Leerseiten zur Bearbeitung der Beispiele benötigt werden, sind diese bei der Klausuraufsicht erhältlich.
- Bitte bearbeiten Sie ***nicht*** **mehr als ein Beispiel auf einem Blatt**.
- Bitte kennzeichnen Sie auf **jeder Seite** eindeutig, welche **Aufgabe** und welcher **Unterpunkt** behandelt wird.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**!
- Diese **Angabe *muss*, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet,** bei der Klausuraufsicht **abgegeben werden**. **Sie dürfen diese Angabe *nicht* mitnehmen!**
- Sofern Sie nicht wollen, dass Ihre Bearbeitung eines Beispiels gewertet wird, streichen Sie die entsprechenden Seiten klar ersichtlich durch.
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** sind Voraussetzungen für die positive Beurteilung der Arbeit!
- Bitte **bleiben Sie bei Klausurende** so lange **auf Ihrem Platz**, bis alle Klausuren eingesammelt sind und die Klausuraufsicht die Freigabe zum Verlassen der Hörsaals erteilt.
- Sofern Sie während der Klausur zur Toilette müssen, melden Sie sich bitte rechtzeitig bei der Klausuraufsicht. Bitte **verlassen Sie nicht ohne Rücksprache mit der Klausuraufsicht den Hörsaal**.
- Sofern Sie vor dem Klausurende gehen wollen, tun Sie dies bitte **nicht in den letzten 15min** vor dem Ende der Klausur. Melden Sie sich bevor Sie gehen bei der Klausuraufsicht und geben Sie Ihre Angabe ab.

Abgabezeit: (wird nur bei vorzeitiger Abgabe von der Klausuraufsicht ausgefüllt) ......

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	34	36	15	15	100
Punkte:					

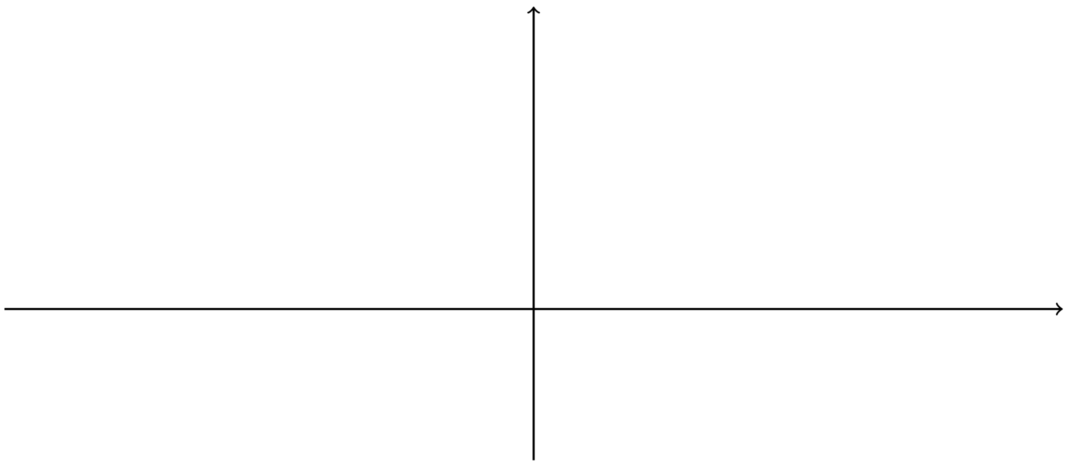
Aufgabe 1: (34 Punkte)

Von einem zeitdiskreten Filter ist die Fouriertransformierte $H(e^{j\theta})$ bekannt. Im Bereich von $-\pi \leq \theta < \pi$ ist das Filter gegeben durch

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & |\theta| \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) (4 Punkte) Skizzieren Sie $\left|H(e^{j\theta})\right|$ im Bereich von $-2\pi \leq \theta < 2\pi$.

Die Skizze entfällt – da trivial – in der Musterlösung. Einzig anzumerken ist die 2π-Periodizität von $H(e^{j\theta})$, die es zu beachten gilt.



(b) (6 Punkte) Berechnen Sie die Energie der Impulsantwort $h[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{H(e^{j\theta})\right\}$.

Parseval'sche Gleichung aus der Formelsamlung:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta}|^2 d\theta$$

wobei der Integrationsbereich günstig gewählt wurde. Im konkreten Fall folgt für die Energie der Impulsantwort:

$$E_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1 \, d\theta = \frac{1}{2\pi} 2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}$$

(c) (6 Punkte) Ein Signal $x[n]$ ist für $n \in \mathbb{Z}$ gegeben durch

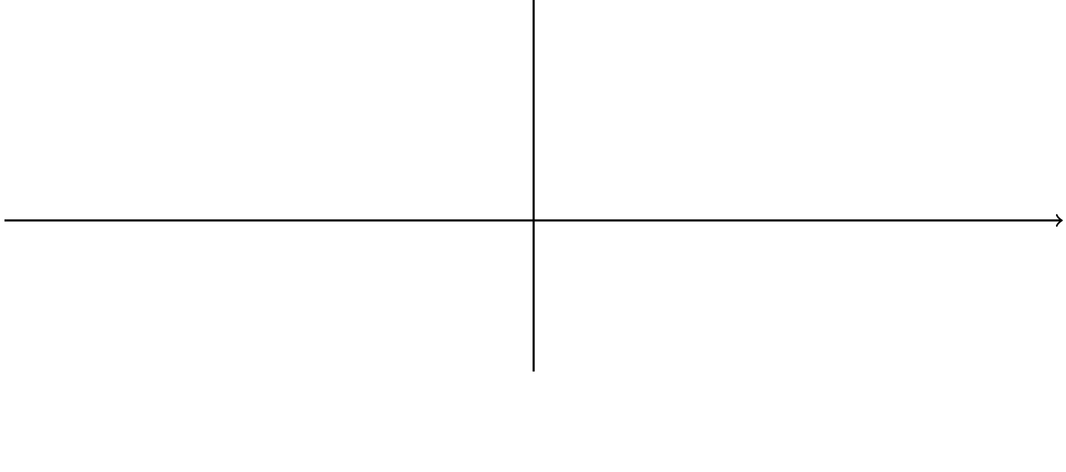
$$x[n] = \cos^2\left(\frac{2\pi n}{6}\right) .$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X(e^{j\theta})$, und skizzieren Sie deren Betragsverlauf $\left|X(e^{j\theta})\right|$ für zumindest eine Periode.

Mit der Standard-Beziehung $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$ folgt

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2}\big(1 + \cos(\frac{4\pi n}{6})\big) \quad \Longleftrightarrow \\ X(e^{j\theta}) &= \frac{1}{2}2\pi\delta_{2\pi}(\theta) + \frac{1}{2}\pi\delta_{2\pi}(\theta - 2\pi/3) + \frac{1}{2}\pi\delta_{2\pi}(\theta + 2\pi/3) \\ &= \pi\,\delta_{2\pi}(\theta) + \frac{1}{2}\pi\,\delta_{2\pi}(\theta - 2\pi/3) + \frac{1}{2}\pi\,\delta_{2\pi}(\theta + 2\pi/3) \end{aligned}$$

Die Transformationspaare für eine Konstante und für die cos-Folge wurden der Formelsammlung entnommen.
Eine zweite Lösungsmöglichkeit ist die Faltung der Fouriertransformierten des nicht-quadrierten cos-Signals im Frequenzbereich. Die Skizze ist trivial und entfällt in der Musterlösung aus Auswandsgründen.



(d) (6 Punkte) An den Eingang des Systems, welches durch seine Fouriertransformierte $H(e^{j\theta})$ gegeben ist, wird das Signal $x[n]$ aus Unterpunkt (c) angelegt. Berechnen Sie

- die Fouriertransformierte des Ausgangssignals $Y(e^{j\theta})$ sowie
- das Ausgangssignal $y[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{Y(e^{j\theta})\right\}$.

Die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals ergibt sich durch Multiplikation des Frequenzgangs des Systems mit der Fourier-Transformierten des Eingangssignals:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta}) &= H(e^{j\theta})\, X(e^{j\theta}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{6} < |\theta| < \pi \end{array} \right\} \left(\pi\, \delta_{2\pi}(\theta) + \frac{1}{2}\pi\, \delta_{2\pi}(\theta - \frac{4\pi}{6}) + \frac{1}{2}\pi\, \delta_{2\pi}(\theta + \frac{4\pi}{6}) \right) \\ &= \pi\, \delta_{2\pi}(\theta) \end{aligned}$$

Die Fourier-Rücktransformierte folgt mit der Korrespondenz $e^{j\theta_0 n} \Leftrightarrow 2\pi\delta_{2\pi}(\theta - \theta_0)$ aus der Formelsammlung zu

$$y[n] = \frac{1}{2}\,.$$

$Y(e^{j\theta}) =$
$y[n] =$

(e) (4 Punkte) Handelt es sich bei dem durch $H(e^{j\theta})$ beschriebenen Filter um

- einen Bandpass oder
- eine Bandsperre oder
- einen Hochpass oder
- einen Tiefpass oder
- einen Allpass oder
- keines davon?

Filtertyp (mit Begründung): Es handelt sich um einen **Tiefpass**, denn das Filter lässt den Gleich-Anteil (d.h. den Anteil bei der Frequenz $\theta = 0$) durch.

(f) (4 Punkte) Handelt es sich bei dem durch $H(e^{j\theta})$ beschriebenen System um ein kausales Filter? Begünden Sie Ihre Antwort!

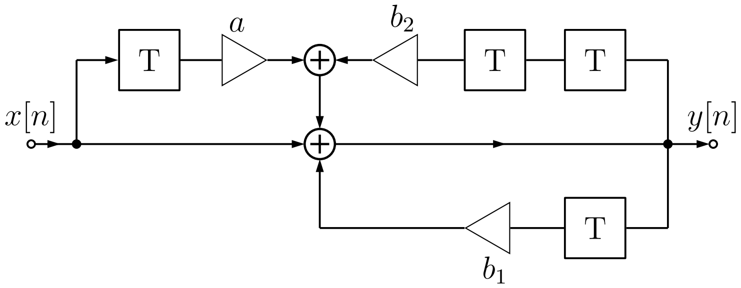
Das Zeitsignal, das zu einem rechteckigen Spektrum korrespondiert, ist eine $\frac{\sin(x)}{x}$-förmige Folge, die auf der Zeitachse unendlich ausgedehnt ist. Das Filter ist daher nicht kausal, weil es von Null verschiedene Werte der Impulsantwort für Zeitindizes $n < 0$ aufweist.

(g) (4 Punkte) Auf welche Weise kann aus dem idealisierten Filter mit der Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ ein realisierbares, kausales FIR-Filter konstruiert werden?

Man könnte die Impulsantwort $h[n]$ des Filters mit der Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ berechnen, und um $N_0/2$ Zeitschritte nach rechts auf der Zeitachse verschieben. Dann könnte man die Impulsantwort mit einem Fenster der Länge N_0 multiplizieren, so dass die resultierende, zeitlich beschränkte Impulsantwort bei $n = 0$ beginnt und bei $n = N_0 - 1$ endet; die Werte der Impulsantwort wären unmittelbar die Koeffizienten eines FIR-Filters der Länge N_0. Dieses Verfahren heißt "Fensterentwurf".

Aufgabe 2: (36 Punkte)

Ein zeitdiskretes, kausales System ist gegeben durch das folgende Blockschaltbild, bestehend aus Addierern, Konstantenmultiplizierern und Zeitverzögerungselementen:



(a) (8 Punkte) Nehmen Sie zunächst $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a \neq b_1 \neq b_2 \neq a$ an. Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $H(z)$. Zeigen Sie, dass $H(z)$ in der Form

$$H(z) = z^2 \frac{(1 + pz^{-1})}{z^2 + qz + w}$$

dargestellt werden kann. Bestimmen Sie die Konstanten p, q und w (als Ausdrücke von a, b_1 und b_2).

- Alle nötigen **Rechenschritte** müssen vorhanden und klar **nachvollziehbar** sein!
- Beachten Sie die Vorzeichen!

Die Differenzengleichung lautet (direkt aus dem Blockschlatbild ablesbar)

$$y[n] = b_2 y[n-2] + b_1 y[n-1] + x[n] + a x[n-1] \, .$$

Nach Z-Transformation ergibt sich

$$Y(z) = b_2 z^{-2} Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + X(z) + a z^{-1} X(z) \, ,$$

und nach Umstellung nach $Y(z)$ und Ausklammern folgt

$$Y(z)\big(1 - b_2 z^{-2} - b_1 z^{-1}\big) = X(z)\big(1 + a z^{-1}\big) \, .$$

Schließlich ergibt sich die gewünschte Form

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + az^{-1}}{1 - b_2 z^{-2} - b_1 z^{-1}} = z^2 \frac{1 + az^{-1}}{z^2 - b_1 z - b_2} \, .$$

Durch Vergleich folgt damit: $p = a$, $q = -b_1$, $w = -b_2$.

$p =$	$q =$	$w =$

(b) (8 Punkte) Nehmen Sie für die in Teilaufgabe (a) gegebene Übertragungsfunktion $p = 2$, $q = -1$ und $w = \frac{3}{16}$ an, und zeichnen Sie die Pole und Nullstellen in das unten abgedruckte Diagramm ein.
Bestimmen Sie weiters den Konvergenzbereich der Z-Transformation an.
Ist das System stabil (Begründung)?

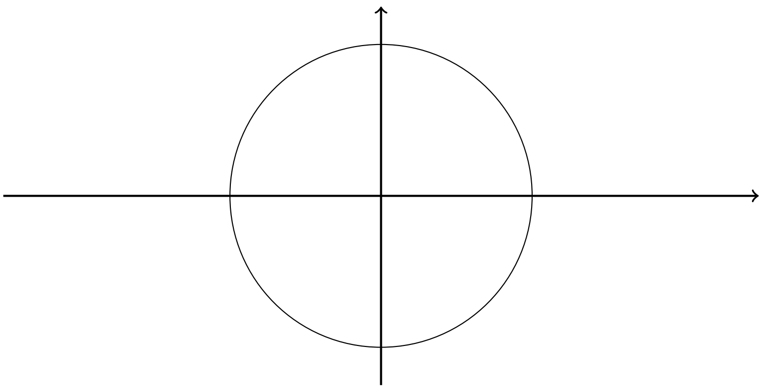
Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt für die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{z^2 - z + \frac{3}{16}} \,.$$

Für die Nullstellen folgt sofort $z_{0,1} = 0$ und $z_{0,2} = -2$.
Für die Polstellen folgt (mit der klassischen Formel zur Lösung qudaratischer Gleichungen):

$$z_{\infty,1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$$

d.h. die Pole lauten $z_{\infty,1} = \frac{1}{4}$ und $z_{\infty,2} = \frac{3}{4}$. Das (triviale) Bild entfällt in der Musterlösung aus Aufwandsgründen.
Das System ist durch das Blockschaltbild definiert, in dem nur Verzögerungselemente verbaut sind. Damit ist das System kausal, d.h. die Impulsantwort ist rechtsseitig und deshalb ist der Konvergenzbereich dort, wo die Beträge von z größer als der betragsgrößte Pol sind. Damit gilt $|z| > \frac{3}{4}$ als Konvergenzbereich.
Das System ist stabil, weil alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.



Konvergenzbereich:

Begründung:

Stabilität:

Begründung:

(c) (8 Punkte) Berechnen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems für die Werte aus Teilaufgabe (b).

Die Übertragungsfunktion lautet (mit eingesetzten Polen)

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{3}{4})} \,.$$

Partialbruchentwicklung:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z+2)}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{3}{4})} = A\frac{1}{z-\frac{1}{4}} + B\frac{1}{z-\frac{3}{4}} \,.$$

Für die Konstanten folgt:

$$A = \frac{H(z)}{z}\Big|_{z=1/4} = \frac{z+2}{z-\frac{3}{4}}\Big|_{z=1/4} = \frac{9/4}{-1/2} = -\frac{9}{2}$$

$$B = \frac{H(z)}{z}\Big|_{z=3/4} = \frac{z+2}{z-\frac{1}{4}}\Big|_{z=3/4} = \frac{11/4}{1/2} = \frac{11}{2} \,.$$

Damit lautet die Partialbruchentwicklung:

$$H(z) = -\frac{9}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{11}{2}\frac{z}{z-\frac{3}{4}} \,.$$

Durch Z-Rücktransformation unter Verwendung der Formelsammlung folgt die Impulsantwort

$$h[n] = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n] + \frac{11}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \sigma[n] \,.$$

(d) (8 Punkte) Zerlegen Sie die Z-Übertragungsfunktion $H(z)$ des Filters aus Teilaufgabe (a) mit den Zahlenwerten aus Teilaufgabe (b) in ein Produkt aus einer Allpass-Übertragungsfunktion $H_a(z)$ (mit genau einem Pol und genau einer Nullstelle) und einer Übertragungsfunktion $H_m(z)$ eines Minimalphasensystems.
Hinweise: Ein minimalphasiges System hat keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises. Ein Allpass hat eine Fourier-Übertragungsfunktion mit konstantem Betrag für alle Frequenzen.
Die Z-Übertragungsfunktion lautet (mit eingesetzten Polen)

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{3}{4})} \,.$$

Da die Nullstelle $z = -2$ außerhalb des Einheitskreises liegt setzen wir an:

$$H(z) = \underbrace{\frac{z+2}{z+a}}_{H_a(z)} \underbrace{\frac{z(z+a)}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{3}{4})}}_{H_m(z)} \,,$$

wobei $|a| < 1$ gelten muss, damit $H_m(z)$ minimalphasig ist.
Die Allpass-Eigenschaft von $H_a(z)$ bedeutet, dass für den Betragsfrequzgang $|H_a(e^{j\theta})| = c$, $c \in \mathbb{R}_+$ bei allen Frequenzen θ gelten muss:

$$H_a(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta}+2}{e^{j\theta}+a} = \frac{e^{j\theta}}{a}\,\frac{1+2e^{-j\theta}}{1+\frac{1}{a}e^{j\theta}} = \frac{1}{a}\,e^{j\theta}\frac{1+2\cos(\theta)-j2\sin(\theta)}{1+\frac{1}{a}\cos(\theta)+j\frac{1}{a}\sin(\theta)} \,.$$

Da $|x-jy| = |x+jy|$, und der Betrag des Zählers gleich dem des Nenners für alle Frequenzen θ sein muss, muss $a = \frac{1}{2}$ gelten; dann gilt

$$|H_a(e^{j\theta})| = 2 \quad \forall\theta \,.$$

(e) (4 Punkte) Wie lautet die Impulsantwort des Allpasses aus Teilaufgabe (d)?
Hinweis: Die Impulsantwort des Allpasses soll kausal sein.
Die Übertragungsfunktion lautet

$$H_a(z) = \frac{z+2}{z+\frac{1}{2}} = \frac{z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{z+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \,.$$

Mit der Tabelle mit Z-Transformationspaaren aus der Formelsammlung folgt für die Impulsantwort

$$h_a[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma[n-1] \,.$$

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Bestimmen Sie die zutreffenden Antworten und kreuzen Sie diese an.

Jede korrekte Antwort wird mit +1 Punkt gezählt. Keine Antwort oder das Ankreuzen beider Alternativen werden mit 0 Punkten gezählt. Eine falsche Antwort wird mit −1 Punkt gezählt. Die Punkte werden für die gesamte Aufgabe summiert; eine negative Gesamtsumme wird auf Null gesetzt.

(a) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Die DTFT konvergiert für betragssummierbare Signale.	$\otimes$	$\bigcirc$
B)	Die DTFT eines periodischen Signals enthält δ-Anteile.	$\otimes$	$\bigcirc$
C)	Die DTFT eines Leistungs-beschränkten, nicht Energie-beschränkten Signals ist durch eine herkömmliche Funktion (ohne δ-Anteile) nicht beschreibbar.	$\otimes$	$\bigcirc$
D)	Die DTFT konvergiert für alle Signale endlicher Länge mit beschränkten Amplituden.	$\otimes$	$\bigcirc$

(b) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die Z-Transformation (ZT) richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Die ZT ist zur Lösung von Differenzengleichungen geeignet.	$\otimes$	$\bigcirc$
B)	Die ZT konvergiert für betragssummierbare Signale.	$\otimes$	$\bigcirc$
C)	Die ZT kann für kausale, mit dem Zeitindex n im Betrag wachsende Signale *nie* konvergieren.	$\bigcirc$	$\otimes$
D)	Konvergiert die ZT für $\lvert z\rvert > 2$, so konvergiert für dieses Signal auch die zeitdiskrete Fourier-Transformation.	$\bigcirc$	$\otimes$

(c) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die Z-Transformation (ZT) richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Für das Signal $x[n] = a^n$, $n = -\infty, ..., -1, 0, 1, ...\infty$, mit $0 < \lvert a\rvert < 1$, konvergiert die ZT.	$\bigcirc$	$\otimes$
B)	Die ZT konvergiert für periodische Signale.	$\bigcirc$	$\otimes$
C)	Bei zweiseitigen Signalen ist der Konvergenzbereich der ZT ringförmig, sofern die ZT konvergiert.	$\otimes$	$\bigcirc$
D)	Bei einem endlich langen, rechtsseitgen Signal liegen die Pole der ZT *im* Einheitskreis der z-Ebene.	$\otimes$	$\bigcirc$

(d) (3 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die Z-Transformierte $X(z)$ eines reellen Zeit-Signals $x[n]$ richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Ist der Zählergrad von $X(z)$ gleich dem Nennergrad (in der Variablen z), so gilt $x[0] = 0$.	$\bigcirc$	$\otimes$
B)	Die Pole von $X(z)$ sind immer reell.	$\bigcirc$	$\otimes$
C)	Die Nullstellen von $X(z)$ können nicht außerhalb des Einheitskreises liegen.	$\bigcirc$	$\otimes$

Aufgabe 4: (15 Punkte)

Bestimmen Sie die zutreffenden Antworten und kreuzen Sie diese an.

Jede korrekte Antwort wird mit +1 Punkt gezählt. Keine Antwort oder das Ankreuzen beider Alternativen werden mit 0 Punkten gezählt. Eine falsche Antwort wird mit −1 Punkt gezählt. Die Punkte werden für die gesamte Aufgabe summiert; eine negative Gesamtsumme wird auf Null gesetzt.

(a) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über zeitdiskrete FIR-Filter (mit beschränkten Koeffizienten) richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Sie haben *immer* eine endlich lange *Sprung*antwort.	◯	⊗
B)	Es können linearphasige FIR-Filter realisiert werden.	⊗	◯
C)	FIR-Filter können instabil sein.	◯	⊗
D)	FIR-Filter sind immer kausal.	◯	⊗

(b) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die zeitdiskrete Filter richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Mit IIR-Filtern können höhere Flankensteilheit und Sperrdämpfung erreicht werden als mit FIR-Filtern bei gleicher Zahl von Filterkoeffizienten.	⊗	◯
B)	Es ist nicht möglich, dass IIR-Filter instabil sind.	◯	⊗
C)	Die binlineare Transformation ist ein Verfahren zum Entwurf von IIR-Filtern.	⊗	◯
D)	Realisierbare Filter können *keine* unendlich steilen Übergänge zwischen Durchlass- und Sperrbereich haben.	⊗	◯

(c) (4 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Die FFT ist eine recheneffiziente Methode, die DFT zu berechnen.	⊗	◯
B)	Die DFT unterscheidet sich von zeitdiskreten Fourier-Reihen nur durch einen konstanten Vorfaktor.	⊗	◯
C)	Die DFT hat keinerlei praktische Bedeutung.	◯	⊗
D)	Die DFT setzt den betrachteten Signalblock endlicher Länge N implizit periodisch fort.	⊗	◯

(d) (3 Punkte) Es soll angegeben werden, ob die folgenden Aussgagen über den Entwurf zeitdiskreter Filter richtig oder falsch sind:

		Richtig	Falsch
A)	Eine Quantisierung der Filterkoeffizienten kann zu instabilen *FIR*-Filtern führen.	◯	⊗
B)	Die "direkte Struktur" ist für die Realsierung von IIR-Filtern mit quantisierten Koeffizienten gut geeignet.	◯	⊗
C)	Beim Design linearphasiger FIR-Filter mit N Koeffizienten sind nur $N/2$ Koeffizienten frei wählbar.	⊗	◯

Raum für Nebenrechnungen